

9.

LUGLIO 1949
PRIMO PROBLEMA

NEL TRAPEZIO RETTANGOLO CONVESSO ABCD GLI ANGOLI DI VERTICI A E D SONO RETTI E L'ANGOLÒ \widehat{ACB} FORMATO DALLA DIAGONALE AC E DAL LATO CB È DI 30° .

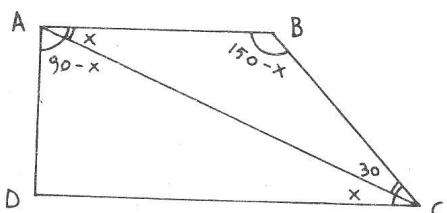
DETERMINARE GLI ANGOLI DEL TRAPEZIO DI VERTICI B E C, SAPENDO CHE LA SOMMA DELLA BASE CD E DEL MULTIPLO SECONDO IL NUMERO m DELL'ALTEZZA AD HA CON LA BASE AB UN RAPPORTO K.

FISSATO UN VALORE DI m , IN QUALI INTERVALLI DOVRA' VARIARE K AFFINCHE' IL PROBLEMA AMMETTA UNA o DUE SOLUZIONI?

N.B. SI CONSIGLIA DI ASSUMERE COME INCognITA L'ANGOLÒ $\widehat{CAB} = x$

PARTE FACOLTATIVA:

- 1° - PER QUALI VALORI DI K LA BASE CD RISULTA UGUALE, MAGGIORE O MINORE DELLA BASE AB?
- 2° - RISOLVERE LA QUESTIONE GEOMETRICAMENTE -



Poniamo $\widehat{BAC} = x$ con $0 < x < 90$
e seconda che il trapezio abbia altezza nulla
o infinita.

E' anche $\widehat{ACD} = x$ perché alterno interno
rispetto al precedente.

Quando, come in questo problema, non siene
fornita la lunghezza di alcun segmento, si indica
arbitrariamente con una lettera uno dei segmen-
ti più importanti. Quasi sempre si dice che
tale lettera viene eliminata per semplificazione,
nello sviluppo dei calcoli.

Nel nostro caso poniamo

$$AD = h$$

Risulta, nel triangolo rettangolo ADC,

$$\frac{AD}{DC} = \operatorname{tg} \alpha$$



$$DC = \frac{h}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{AD}{AC} = \operatorname{sen} \alpha$$



$$AC = \frac{h}{\operatorname{sen} x}$$

Applichiamo ora il teorema dei seni al
triangolo ABC, per calcolare AB

$$AB : \operatorname{sen} 30 = AC : \operatorname{sen}(150 - x)$$

$$AB = \frac{AC \cdot \operatorname{sen} 30}{\operatorname{sen}(150 - x)}$$

cioè

$$AB = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen} 150 \cos x - \operatorname{cos} 150 \operatorname{sen} x} = \frac{h}{\operatorname{sen} x (\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x)}$$

Applichiamo la relazione fornita dal proble-
ma

$$\frac{DC + m \cdot AD}{AB} = K$$

$$\frac{\frac{h}{\operatorname{tg} x} + mh}{\frac{h}{\operatorname{sen} x (\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x)}} = K$$

Come avevamo previsto, semplificando si eli-
mina la lettera h e si ottiene

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + m = \frac{K}{\operatorname{sen} x (\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x)}$$

avendo già posto
 $\operatorname{sen} x \neq 0$, possia-
mo elidere lo

$$(\cos x + m \sin x)(\cos x + \sqrt{3} \sin x) = K$$

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + m \sin x \cos x + m \sqrt{3} \sin^2 x = K (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^2 x (m\sqrt{3} - K) + \sin x \cos x (m + \sqrt{3}) + \cos^2 x (1 - K) = 0$$

e, dividendo per $\cos^2 x$, si ha

$$\begin{aligned} \tan^2 x (m\sqrt{3} - K) + \tan x (m + \sqrt{3}) + 1 - K &= 0 \\ 0 < x < 90^\circ \\ K > 0 \end{aligned}$$

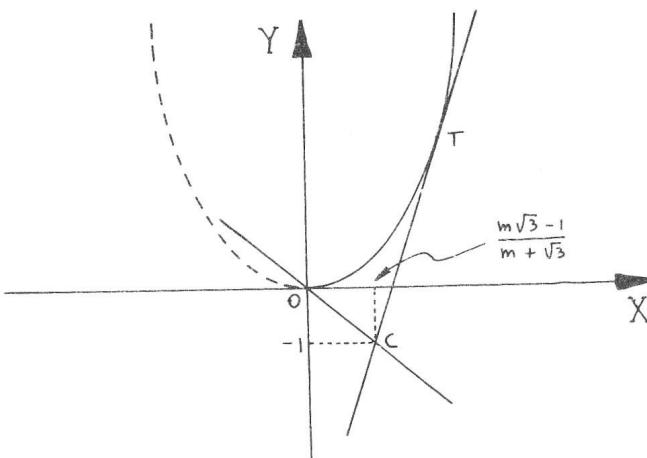
che è l'equazione parametrica da discutere.
Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$\begin{cases} \tan x = X \\ \tan^2 x = Y \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} Y = \frac{m+\sqrt{3}}{K-m\sqrt{3}} X + \frac{1-K}{K-m\sqrt{3}} \\ Y = X^2 \end{cases} \quad (1)$$

cioè un fascio di rette e una parabola di cui dobbiamo considerare solo l'arco per cui si ha $X > 0$



Il centro del fascio di rette, al solito, si ricava dandone due valori arbitrari a K (per esempio $K=1$ e $K=m\sqrt{3}$), e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.

Sviluppando i calcoli si ha

$$C = \left(\frac{m\sqrt{3}-1}{m+\sqrt{3}}, -1 \right)$$

Determiniamo per quale valore di K si ha la tangenza, eliminando la Y nella (1) e ponendo $\Delta = 0$ -

$$\begin{aligned} X^2(K - m\sqrt{3}) - X(m + \sqrt{3}) - 1 + K &= 0 \\ \Delta = (m + \sqrt{3})^2 - 4(K - m\sqrt{3})(K - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Cioè, semplificando

$$4K^2 - 4K(m\sqrt{3} + 1) - (m - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$K = \frac{m\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{m^2 + 1}}{2}$$

(dove abbiamo scartato la soluzione con il segno - perché corrispondente alla tangenza con l'arco di parabola tratteggiato).

La retta del fascio è verticale quando il coefficiente angolare (vedi la (1)) è infinito, cioè quando

$$K - m\sqrt{3} = 0$$

$$K = m\sqrt{3}$$

Infine la retta del fascio passa per l'origine quando il termine noto della (1) è nullo, cioè quando

$$1 - K = 0$$

$$K = 1$$

Quindi il problema ha due soluzioni per

$$m\sqrt{3} < K < \frac{m\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{m^2 + 1}}{2}$$

e una soluzione per

$$1 < K < m\sqrt{3}$$

(o con i segni di disegualanza invertiti, a seconda del segno di m) -

Infine i segmenti AB e DC inseriti fra loro il ruolo di base maggiore e minore, quando $x = 60^\circ$ (in tal caso il trapezio diventa un quadrato).

Sì ha allora

$$\operatorname{Tg} x = \sqrt{3}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione pitagorica si ricava

$$K = m\sqrt{3} + 1$$