

11.

**SETTEMBRE 1949**  
**PRIMO PROBLEMA**

IN UNA DATA CIRCONFERENZA DI CENTRO  $O$ , LA CORDA  $AB$  È IL LATO DEL QUADRATO INSCRITTO. CONDOTTA NEL PUNTO  $B$  LA SEMIRETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA CHE GIACE, RISPETTO ALLA RETTA  $AB$ , NEL SEMIPIANO CHE CONTIENE IL CENTRO  $O$ , DETERMINARE SULLA SEMIRETTA UN PUNTO  $P$  TALE CHE SI ABBAIA

$$\frac{\overline{BM} + 2\sqrt{2} \overline{MP}}{\overline{PB}} = K$$

OVE  $M$  È L'ULTERIORE INTERSEZIONE DEL SEGMENTO  $AP$  CON LA CIRCONFERENZA E  $K$  UN NUMERO REALE POSITIVO. DISCUTERE IL PROBLEMA.

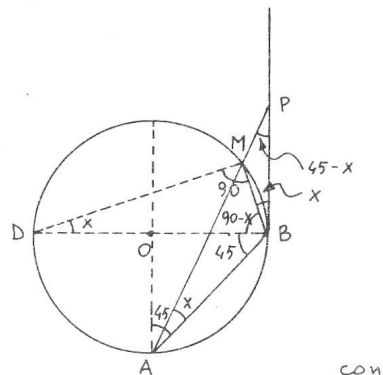
N.B. RISOLVERE IL PROBLEMA PER VIA TRIGONOMETRICA.

PARTE FACOLTATIVA:

1°- CONDOTTA IN  $B$  L'INTERA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA E DETTO  $ABCD$  IL QUADRATO INSCRITTO, DETERMINARE LE

PARTI DELLA TANGENTE DESCRITTE DAL PUNTO P QUANDO IL PUNTO M PERCORRE GLI ARCHI BC, CD, DA, AB E I LIMITI DI K AL TENDERE DI M AI VERTICI B, C, D, A.

2° - RISOLVERE IL PROBLEMA PER VIA GEOMETRICA -



Indicando con  $r$  il raggio della circonferenza, e'

$$AB = \sqrt{t^2 + t^2} = t\sqrt{2}$$

Poniamo

$$M \hat{A} B = x$$

con

$$0 < x < 45$$

Per il Teorema della corda e'

$$MB = 2r \sin x$$

L'angolo  $\hat{M}\hat{D}\hat{B}$  insiste sulla stessa corda dell'angolo  $\hat{M}\hat{A}\hat{B}$  e perciò è anche  $\hat{M}\hat{D}\hat{B} = x$ .  
Il triangolo  $MDB$  è rettangolo e quindi

$$\hat{DBM} = 90 - x$$

$M\hat{A}D\hat{B}P$  è retto per costruzione, e perciò  
 $M\hat{B}P = x$

Nel triangolo ABP risulta dunque

$$P \hat{A} B = x$$

$$A \hat{B} P = 45 + (90 - x) + x = 135.$$

e, per differenza

$$\hat{APB} = 180 - 135 - x = 45 - x$$

Applichiamo ora il teorema dei seni al triangolo  $ABP$

$$AB : \operatorname{sen}(45 - x) = PB : \operatorname{sen} x$$

$$PB = \frac{AB \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(45-x)}$$

$$PB = \frac{2t \sin x}{\cos x - \sin x}$$

e il teorema dei seni al triangolo MBP

$$MP : \operatorname{sen} x = MB : \operatorname{sen} (45 - x)$$

$$MP = \frac{MB \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(45-x)}$$

$$MP = \frac{2 + \sqrt{2} \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$$

Siamo ora in grado di applicare la relazione

66

Settembre 1949 - Primo Problema

del problema

$$\frac{\overline{MB} + 2\sqrt{2} \overline{MP}}{\overline{PB}} = K \quad (\text{con } K > 0)$$

Sviluppando e semplificando si ottiene

$$\begin{cases} 3 \sin x + \cos x - K = 0 \\ 0 < x < 45^\circ \quad K > 0 \end{cases} \quad (1)$$

che è l'equazione parametrica da discutere.  
 Associamola con la relazione fondamentale  
 della Trigonometria, e poniamo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \sin x = Y \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} 3Y + X - K = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

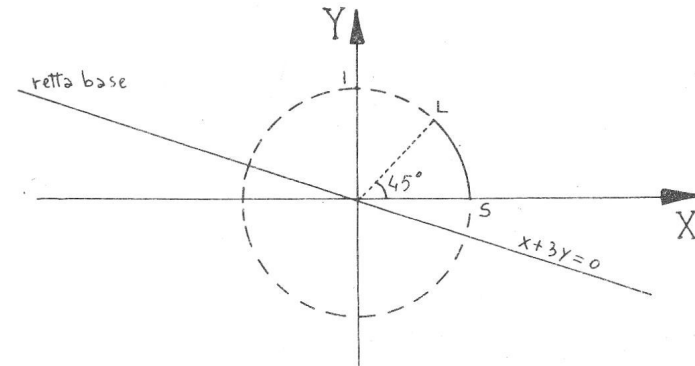
cioè un fascio di rette parallele e una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine.

Di quest'ultima dovremo considerare solo l'arco  $LS$  corrispondente ad un angolo  $x$  compreso fra  $0^\circ$  e  $45^\circ$ .

Nel grafico è disegnata anche la "retta base", cioè quella retta del fascio che passa per l'origine.

Settembre 1949 - Primo Problema

67



$$S \equiv (1; 0)$$

$$L \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcoliamo per quali valori di  $K$  la generica retta del fascio passa per  $S$  e per  $L$ , imponendo al fascio di passare per tali punti.

$$S \rightarrow 1 - K = 0 \rightarrow K = 1$$

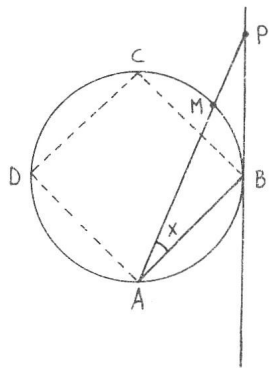
$$L \rightarrow 3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - K = 0 \rightarrow K = 2\sqrt{2}$$

Il problema ammette una sola soluzione per

$$1 < K < 2\sqrt{2}$$

Passiamo ora alla parte facoltativa. Si può scrivere (dividendo num. e denom. per  $\cos x$ )

$$PB = \frac{2r \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{2r \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$$



Inoltre per

$$M \equiv B \longrightarrow x = 0^\circ$$

$$M \equiv C \longrightarrow x = 45^\circ$$

$$M \equiv D \longrightarrow x = 90^\circ$$

$$M \equiv A \longrightarrow x = 135^\circ$$

e quindi, sostituendo  
nella (1), si ha

$$M \equiv B \longrightarrow K = 3 \sin 0 + \cos 0 \longrightarrow K = 1$$

$$M \equiv C \longrightarrow K = 3 \sin 45 + \cos 45 \longrightarrow K = 2\sqrt{2}$$

$$M \equiv D \longrightarrow K = 3 \sin 90 + \cos 90 \longrightarrow K = 3$$

$$M \equiv A \longrightarrow K = 3 \sin 135 + \cos 135 \longrightarrow K = \sqrt{2}$$