

12.

1949: SECONDO PROBLEMA

FISSATO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI, DIMOSTRARE CHE FRA LE PARABOLE, CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE y , DUE (E DUE SOLTANTO) PASSANO PER I PUNTI

$$A \equiv (0; \frac{1}{4}) \quad B \equiv (-\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4})$$

E SONO TANGENTI ALL'ASSE x .

SCRIVERE POI LE EQUAZIONI DELLE TANGENTIALI ALE DUE PARABOLE NEL PUNTO A E DETERMINARE L'ANGOLO DA ESSE FORMATO.

INFINE, CONDOTTA UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE x DI EQUAZIONE $y=k$, DETTE M, N LE INTERSEZIONI DI ESSA CON UNA DELLE PARABOLE CONSIDERATE E FISSATO UN PUNTO P DI ORDINATA $p > 0$, DETERMINARE IL MASSIMO DELL'AREA DEL TRIANGOLO MNP AL VARIARE DI k NELL'INTERVALLO $(0, p)$, ESTREMI ESCLUSI.

PARTE FACOLTATIVA:

1° SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLE TANGENTI ALLE DUE PARABOLE NEL PUNTO B E DETERMINARE L'AMPIEZZA DEL LORO ANGOLO.

2° - DIMOSTRARE CHE I PUNTI A, C, C', A' , DOVE C E A' SONO LE INTERSEZIONI CON L'ASSE x RISPETTIVAMENTE DELLE TANGENTI IN A E IN B ALLA PARABOLA DI VERTICE DI ASCISSA POSITIVA, E C' L'INTERSEZIONE DI QUEST'ULTIMA TANGENTE CON QUELLA CONDOTTA IN A ALL'ALTRA PARABOLA, SONO VERTICI DI UN TRAPEZIO ISOSCELE.

Una parabola generica con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponendo il passaggio per i punti A e B , si ha

$$\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4} = a \cdot \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} - b \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} + c \end{cases}$$

sostituendo $c = \frac{1}{4}$ nella seconda equazione e semplificando, avremo

$$a = \frac{b(1+\sqrt{3}) + 3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

e quindi la parabola generica può essere espressa in funzione del solo coefficiente b

$$y = \frac{b(1+\sqrt{3}) + 3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} x^2 + bx + \frac{1}{4}$$

Calcoliamo il valore di quest'ultimo coefficiente imponendo la condizione di tangenza con la retta $y = 0$.

Si ottiene

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot \frac{b(1+\sqrt{3}) + 3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

cioè

$$(2 + \sqrt{3})b^2 - b(1 + \sqrt{3}) - 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

Risolviendo si ha

$$b = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(5 + 3\sqrt{3})^2}}{2(2 + \sqrt{3})} = \begin{cases} \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ \frac{-2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

Sostituendo ciascuno di questi due valori nell'ultima espressione della pagina precedente, si ottiene rispettivamente

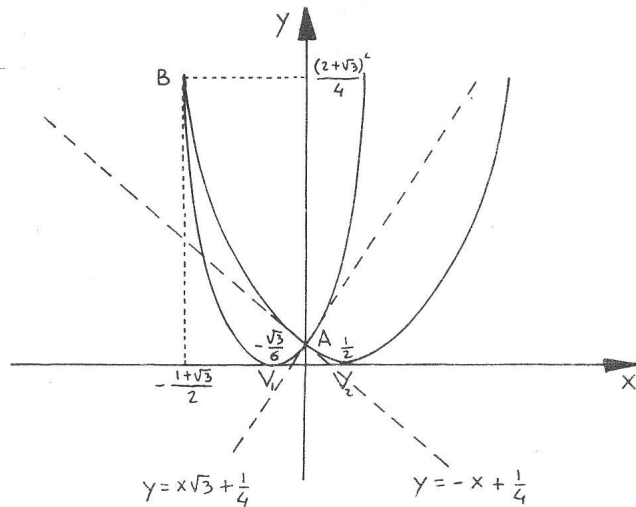
$$a = 3$$

$$a = 1$$

e perciò le equazioni delle due parabole richieste sono

$$\begin{cases} y = 3x^2 + \sqrt{3}x + \frac{1}{4} \\ y = x^2 - x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

con vertici nei punti $V_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}; 0)$ e $V_2 = (\frac{1}{2}; 0)$



Il fascio di rette passanti per A ha equazione

$$y - \frac{1}{4} = m x \quad \longrightarrow \quad y = m x + \frac{1}{4}$$

Le derivate delle due parabole sono

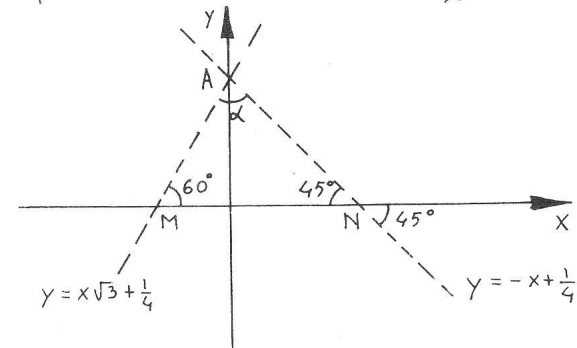
$$y' = 6x + \sqrt{3} \quad y' = 2x - 1$$

Ponendo in esse $x=0$, si ottengono i coefficienti angolari delle due rette tangenti in A , che sono $m = \sqrt{3}$ e $m = -1$. Quindi

$$y = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}$$

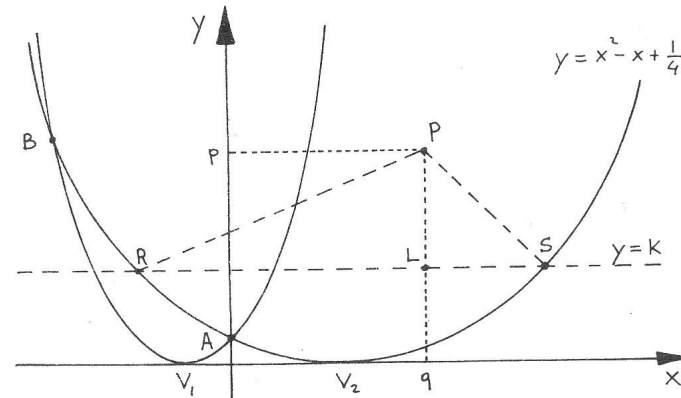
$$y = -x + \frac{1}{4}$$

sono le equazioni delle due rette tangenti -



Osservando la figura e il triangolo AMN si ricava immediatamente che

$$\alpha = 180 - 60 - 45 = 75$$



Tracciamo ora la retta $y = K$ e il punto P di coordinate (p, q) con $p > 0$.

La superficie del triangolo RSP non dipende ovviamente dal parametro q perché fissando un qualsiasi valore per p , al variare di q si ottengono tutti triangoli con stessa base e stessa altezza, quindi con la stessa superficie.

Calcoliamo le coordinate di R e S risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - x + \frac{1}{4} \\ y = K \end{cases}$$

si ha

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{K}}{2}; K \right) \quad S = \left(\frac{1 + \sqrt{K}}{2}; K \right)$$

La base e l'altezza del triangolo sono allora

$$\begin{cases} RS = \frac{1 + \sqrt{K}}{2} - \frac{1 - \sqrt{K}}{2} = \sqrt{K} \\ PL = p - K \end{cases}$$

e la sua superficie è

$$\begin{aligned} S &= \frac{RS \cdot PL}{2} = \frac{\sqrt{K} (p - K)}{2} = \frac{1}{2} p \sqrt{K} - \frac{1}{2} K^{3/2} \\ &= \frac{1}{2} p K^{1/2} - \frac{1}{2} K^{3/2} \end{aligned}$$

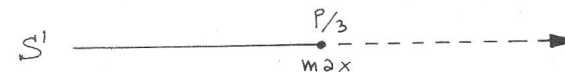
Calcoliamo la derivata

$$S' = \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2} K^{-1/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} K^{1/2} = \frac{1}{4} p K^{-1/2} - \frac{3}{4} K^{1/2}$$

cioè
$$S' = \frac{p}{4\sqrt{K}} - \frac{3\sqrt{K}}{4} = \frac{p - 3K}{4\sqrt{K}}$$

Studiamone il segno: la funzione è reale solo per $K \geq 0$ e sotto tale condizione il denominatore è positivo.

Basta quindi studiare il segno del numeratore, che fornisce



Il triangolo PRS ha dunque area massima per

$$K = p/3$$

Passiamo alla parte facoltativa. Il fascio di rette passanti per B è

$$y = m \left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) + \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4}$$

Le derivate delle due parabole calcolate nel punto $x = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ forniscono

$$\begin{cases} f'(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}) = -3 - 2\sqrt{3} \leftarrow \text{coeff. ang. prima tang.} \\ f'(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}) = -2 - \sqrt{3} \leftarrow \text{coeff. ang. seconda tang.} \end{cases}$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$\begin{cases} y = x(-3-2\sqrt{3}) - \frac{11+6\sqrt{3}}{4} \\ y = x(-2-\sqrt{3}) - \frac{3+2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

che sono le due rette tangenti cercate.
Per calcolare l'angolo da esse formato applichiamo la formula

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

dove m_1 e m_2 sono i coefficienti angolari delle due rette - Si ha

$$\tan \alpha = \frac{(-3-2\sqrt{3}) - (-2-\sqrt{3})}{1 + (-3-2\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})} = \frac{4-3\sqrt{3}}{11}$$

e perciò

$$\alpha = \arctan \frac{4-3\sqrt{3}}{11}$$

Tracciamo infine (vedi pagina seguente) il quadrilatero $ACC'A'$.

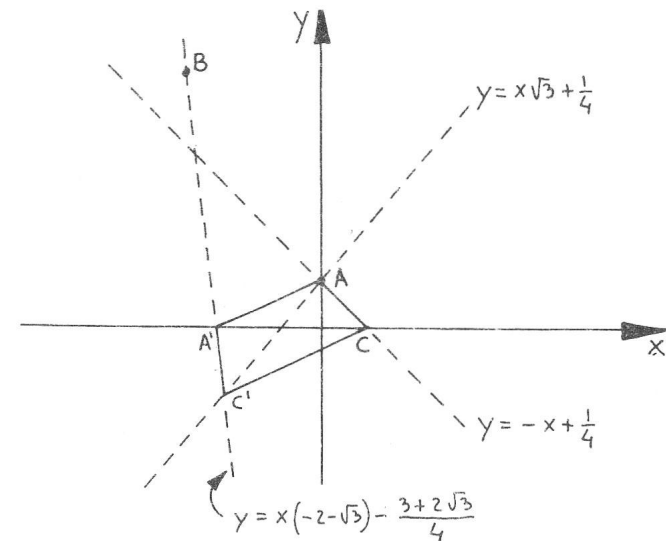
Tralasciando i calcoli per brevità, si trovano le coordinate dei quattro vertici:

$$A \equiv (0; \frac{1}{4})$$

$$A' \equiv (-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0)$$

$$C \equiv (\frac{1}{4}; 0)$$

$$C' \equiv (-\frac{1+\sqrt{3}}{8}; -\frac{1+\sqrt{3}}{8})$$



I coefficienti angolari delle rette passanti per AA' e CC' risultano entrambi

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

quindi il quadrilatero è un trapezio -
Inoltre risulta

$$AC = A'C' = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

e perciò il trapezio è isoscele.