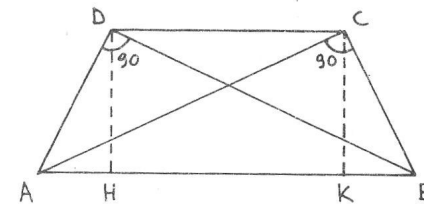


13.

LUGLIO 1950  
PRIMO PROBLEMA

RISOLVERE UN TRAPEZIO ISOSCELE CON-  
VESCO AVENTE LE DIAGONALI PERPENDICOLARI AI  
LATI OBLIQUI, SAPENDO CHE LA SOMMA DEI  
QUADRATI DELLE MISURE DEI SUOI LATI E'  
 $m^2$  E LA LUNGHEZZA DI UNA DIAGONALE E'  $d$ .  
DISCUSSIONE.



$$AC = BD = d$$

Indichiamo

$$AB = x$$

e applichiamo il primo teorema di Euclide al  
triangolo ADB - Si ha  
 $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB}$

$$\overline{HB} = \frac{\overline{DB}^2}{\overline{AB}} = \frac{d^2}{x}$$

Ne deriva che

$$\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB} = x - \frac{d^2}{x} = \frac{x^2 - d^2}{x}$$

$$\overline{DC} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AH} = x - 2 \frac{x^2 - d^2}{x} = \frac{2d^2 - x^2}{x}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{x^2 - d^2}$$

Applichiamo ora la relazione del problema

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 + 2 \cdot \overline{AD}^2 = m^2$$

$$x^2 + \left( \frac{2d^2 - x^2}{x} \right)^2 + 2x^2 - 2d^2 = m^2$$

poiché  $x \neq 0$  si può eliminare il denominatore: sviluppando e semplificando si ha

$$4x^4 - x^2(6d^2 + m^2) + 4d^4 = 0 \quad (1)$$

che è l'equazione parametrica da discutere.

I valori estremi che può assumere la variabile  $x$  si determinano con il criterio seguente.

Le diagonali del trapezio hanno lunghezza fissa  $d$ , e sono perpendicolari ai lati obliqui.

La  $x$  assume valore minimo quando il trapezio è talmente "schiacciato" ( $D \equiv A$  e  $C \equiv B$ ), da degenerare in un segmento: in tal caso si ha

$$x = d$$

La  $x$  assume invece valore massimo quando il trapezio aumenta di altezza e la base minore diviene un punto ( $D \equiv C$ ). In tal caso il trapezio si trasforma in un triangolo rettangolo isoscele e si ha

$$x = d\sqrt{2}$$

ipotenusa del triangolo suddetto. Quindi

$$d < x \leq d\sqrt{2} \quad (2)$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$\begin{cases} x^2 = X \\ x^4 = Y \end{cases}$$

dalla (1) si ottiene

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ 4Y - X(6d^2 + m^2) + 4d^4 = 0 \end{cases}$$

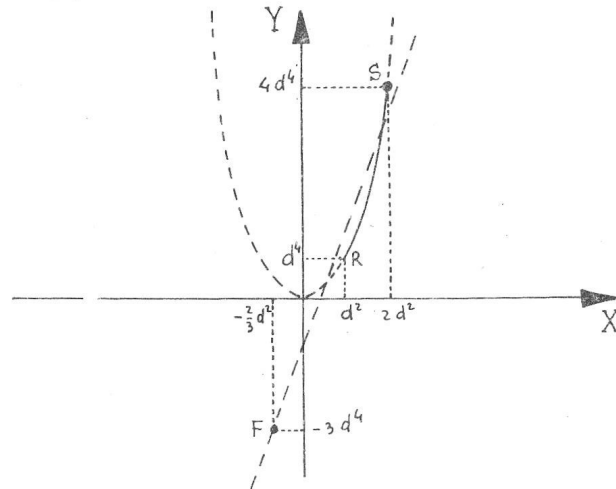
cioè una parabola di cui dovremo considerare solo l'arco con

$$d^2 < X \leq 2d^2 \quad (3)$$

a causa della limitazione (2), e un fascio di rette con centro nel punto

$$F = \left(-\frac{2}{3}d^2; -3d^4\right)$$

ottenuto al solito dando al parametro  $m^2$  due valori arbitrari (per esempio 0 e  $6d^2$ ) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.



Si ha tangenza fra retta generica del fascio e l'arco considerato di parabola, quando  $m^2 = 2d^2$  cioè, come si vedrà, quando la retta del fascio passa per R.

Calcoliamo ora per quale valore del parametro la retta passa per R, imponendo al fascio di passare per tale punto.

$$4d^4 - d^2(6d^2 + m^2) + 4d^4 = 0 \rightarrow m^2 = 2d^2$$

(come prima accennato in tale punto la retta è tangente alla parabola).

Imponendo il passaggio per S, si trova

$$16d^4 - 2d^2(6d^2 + m^2) + 4d^4 = 0 \rightarrow m^2 = 4d^2$$

Poiché la retta del fascio ha sempre una sola intersezione con l'arco RS di parabola (il punto R è escluso a causa della limitazione (3)), si avrà sempre una soluzione per

$$2d^2 < m^2 \leq 4d^2$$