

14.

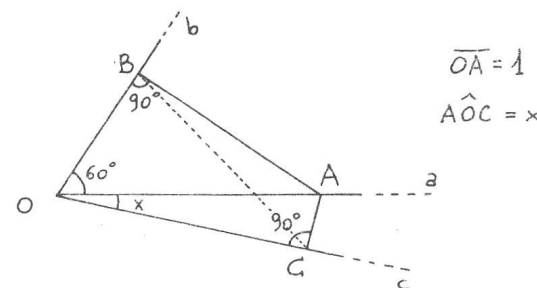
1950: SECONDO PROBLEMA

LE SEMIRETTE a, b, c DI ORIGINE O SONO COMPLANARI. LA SEMIRETTA a FORMA CON b UN ANGOLO DI 60° ED È INTERNA ALL'ANGOLO CONVESSO LIMITATO DALLE ALTRE DUE ED È TALE CHE LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI UN SUO PUNTO QUALUNQUE SULLA RETTA CUI APPARTIENE c , CADE SULLA SEMIRETTA c . FISSATO SULLA SEMIRETTA a IL SEGMENTO UNITARIO OA , SIANO B E C RISPETTIVAMENTE LE PROIEZIONI DI A SU b E c .

DETERMINARE L'AMPIEZZA x DELL'ANGOLO DELLE SEMIRETTE a, c , SAPENDO CHE IL TRIANGOLO BOC È EQUIVALENTE AD UN TRIANGOLO DI BASE OA E ALTEZZA UGALE AD UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA NOTA K .

È FACOLTATIVA LA RISOLUZIONE GEOMETRICA.

Ricordiamo che un angolo è convesso se la sua ampiezza è compresa fra 0° e 180° .



L'angolo formato dalle rette b e c deve quindi essere minore di un angolo piatto.

Inoltre la proiezione di A su c deve sempre cadere sulla semiretta c , e non sul suo prolungamento oltre O .

Perciò

$$0 < x \leq 90$$

Nel triangolo OCA si ha

$$\frac{OC}{OA} = \cos x \longrightarrow OC = \cos x$$

e, nel triangolo OBA ,

$$\frac{OB}{OA} = \cos 60 \longrightarrow OB = \frac{1}{2}$$

La superficie del triangolo OBC è dunque

$$\begin{aligned}
 S_{OBC} &= \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(60+x)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cos x \sin(60+x) \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{3} \cos^2 x + \sin x \cos x}{8}
 \end{aligned}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$S_{OBC} = \frac{1 \cdot K}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cos^2 x + \sin x \cos x}{8} = \frac{K}{2}$$

e perciò

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \cos^2 x + \sin x \cos x &= 4K \\
 0 < x &\leq 90 \\
 K > 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

che è l'equazione parametrica da discutere.

Dalle formule di duplicazione si ricava

$$\begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x & \rightarrow \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 & \rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nella (1), si ha

$$\sqrt{3} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} = 4K$$

cioè

$$\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 8K - \sqrt{3}$$

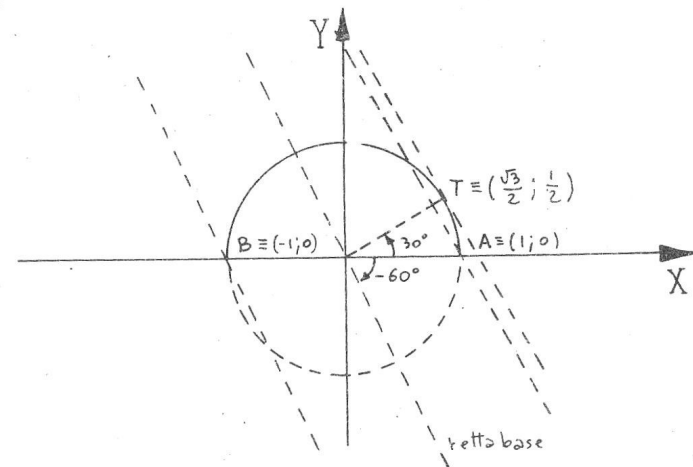
Ponendo

$$\begin{cases} \cos 2x = X \\ \sin 2x = Y \end{cases}$$

e associando all'equazione la prima relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene

$$\begin{cases} \sqrt{3} X + Y = 8K - \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\sqrt{3}$ e una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, di cui dovremo considerare solo la semicirconferenza superiore (perché $0 < 2x \leq 180$)



La retta base è inclinata di 60° verso il basso (perché $m = -\sqrt{3}$), e perciò

$$T \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right)$$

Imponendo il passaggio del fascio di rette per B, A, T , si ha

$$\begin{cases} B \rightarrow -\sqrt{3} + 0 = 8K - \sqrt{3} & \rightarrow K = 0 \\ A \rightarrow \sqrt{3} + 0 = 8K - \sqrt{3} & \rightarrow K = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ T \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 8K - \sqrt{3} & \rightarrow K = \frac{2+\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

e perciò

