15.

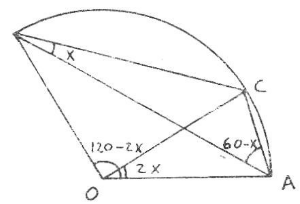
SETTEMBRE 1950
PRIMO PROBLEMA

DATO UN SETTORE CIRCOLARE, IN CUI L'ANGOLO AL CENTRO $A\hat{O}B$ È DI 120° ED IL RAGGIO È DI LUNGHEZZA r, DETERMINARE L'AMPIEZZA $2x$ DELL'ANGOLO $A\hat{O}C$, OVE C È UN PUNTO DELL'ARCO AB, TALE CHE IL RAPPORTO FRA I PERIMETRI DEI TRIANGOLI AOC E COB SIA $\frac{1}{K}$ -

DISCUSSIONE -

$A\hat{O}C = 2x$

$OA = OC = OB = r$



L'angolo $A\hat{B}C = x$ perchè angolo alla circonferenza che insiste sull'angolo al centro $A\hat{O}C = 2x$ -

Per la stessa ragione, poichè $B\hat{O}C = 120 - 2x$, sarà $B\hat{A}C = 60 - x$ -

Per il teorema della corda, è

$$AC = 2r \,\text{sen}\, x$$
$$BC = 2r \,\text{sen}\,(60 - x)$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{OA + OC + AC}{OC + OB + BC} = \frac{1}{K}$$

cioè

$$\frac{2r + 2r \,\text{sen}\, x}{2r + 2r \,\text{sen}\,(60 - x)} = \frac{1}{K}$$

$$\frac{1 + \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\,(60 - x)} = \frac{1}{K}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen}\, x(1 + 2K) - \sqrt{3}\cos x = 2 - 2K \\ 0 \leq x \leq 60 \qquad K > 0 \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione geometrica ponendo

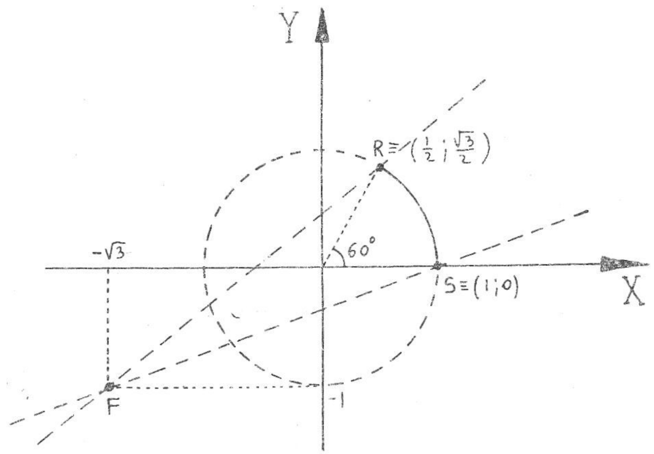
$$\begin{cases} \cos x = X \\ \text{sen}\, x = Y \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} Y(1 + 2K) - \sqrt{3}\, X = 2 - 2K \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette con centro nel punto $F \equiv (-\sqrt{3}\,;-1)$ e un arco di circonferenza (unitaria

e con centro nell'origine), con 60° di ampiezza.



La retta del fascio non può mai essere tangente all'arco RS di circonferenza.
Imponiamo il passaggio per R e S

$$\begin{cases} R \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 2K) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - 2K \longrightarrow K = 2(2 - \sqrt{3}) \\ S \longrightarrow 0 - \sqrt{3} = 2 - 2K \longrightarrow K = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi il problema ha sempre una sola soluzione per

$$\boxed{2(2 - \sqrt{3}) \leq K \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$$