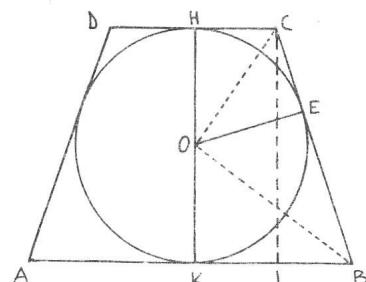


16.

## 1950: SECONDO PROBLEMA

UN TRAPEZIO ISOSCELE E' CIRCOSCRITTO AD UN CERCHIO. DETERMINARE I LATI DEL TRAPEZIO E IL RAGGIO DEL CERCHIO, SAPENDO CHE IL TRAPEZIO E' EQUIVALENTE AL QUADRATO DI LATO  $2\sqrt{2}$ , E CHE IL RAPPORTO FRA I VOLUMI DEI SOLIDI DELLA SFERA E DEL TRONCO DI CONO, CHE SI OTTENGONO FACENDO COMPIERE UNA MEZZA ROTAZIONE AL CERCHIO ED AL TRAPEZIO INTORNO AL DIAMETRO PERPENDICOLARE ALLE BASI DEL TRAPEZIO, E' UGUALE AL NUMERO REALE POSITIVO K. DISCUTERE IL PROBLEMA.



Poniamo

$$\begin{cases} HC = x \\ KB = y \end{cases}$$

poiché  $HC = CE$  e  $EB = KB$ , si ha  
 $CB = x + y$

Inoltre

$$LB = y - x$$

e perciò  $LC = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy}$

quindi il raggio della circonferenza e'

$$OK = \sqrt{xy}$$

Imponendo la prima relazione del problema, si ottiene

$$\frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{HK} = (2\sqrt{2})^2 \rightarrow (x+y)\sqrt{xy} = 2^2 \quad (1)$$

Ora, ricordando che il volume del tronco di cono è  $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$ , dove  $h$  è l'altezza del tronco e  $R$  ed  $r$  i raggi delle due basi, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot \overline{OK}^3 \rightarrow \frac{4}{3} \pi \sqrt{(xy)^3} \rightarrow \frac{4}{3} \pi xy \sqrt{xy} \\ V_{\text{tronco}} = \frac{\pi \cdot \overline{HK}}{3} (\overline{KB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{KB} \cdot \overline{HC}) \rightarrow \frac{2}{3} \pi \sqrt{xy} (x^2 + y^2 + xy) \end{array} \right.$$

Imponendo la seconda relazione del problema  
d'anno

$$\frac{V_{\text{sfera}}}{V_{\text{tronco}}} = K \rightarrow 2xy = K(x^2 + y^2 + xy) \quad (2)$$

Le (1) e (2) costituiscono un sistema simmetrico, che può quindi essere trasformato e ridotto ad un semplice sistema del tipo somma e prodotto.

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{xy} = a^2 \\ 2xy = K(x^2 + y^2 + xy) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{a^2}{\sqrt{xy}} \\ 2xy = K(x+y)^2 - Kxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(z+k) = K(x+y)^2 \\ \rightarrow xy(z+k) = K \frac{a^4}{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = \frac{K a^4}{z+k} \\ \rightarrow xy = a^2 \sqrt{\frac{K}{z+k}} \end{cases}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tralasciato il doppio segno  $\pm$  perché i segmenti  $x$  ed  $y$  debbono essere sempre entrambi positivi.

Per la stessa ragione si ha

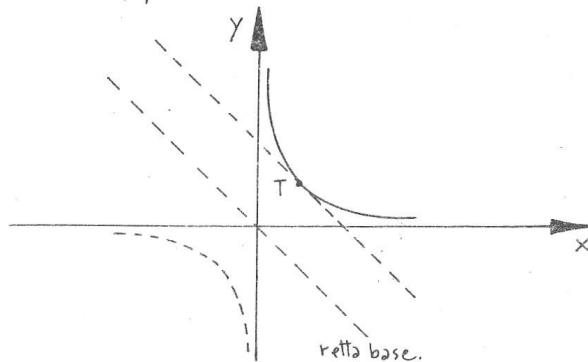
$$\sqrt{xy} = \sqrt{a^2 \sqrt{\frac{K}{z+k}}} = a \sqrt[4]{\frac{K}{z+k}}$$

e quindi, sostituendo nella prima equazione del sistema, si ottiene infine

$$\begin{cases} x+y = a \sqrt[4]{\frac{z+k}{K}} \\ xy = a^2 \sqrt{\frac{K}{z+k}} \end{cases} \quad (3)$$

$x > 0 \quad y > 0 \quad K > 0$

che rappresenta il sistema da discutere, cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare  $m = -1$ , e una famiglia di iperbole equilatere (del tipo  $xy = \text{cost.}$ , con costante positiva). Dovendo considerare solo i rami di iperbole situati nel primo quadrante, perché deve essere  $x > 0, y > 0$ .



Il problema ammetterà sempre due soluzioni simmetriche per quei valori di  $K$  per cui la retta del fascio taglia l'arco di iperbole contenuto nel primo quadrante.