18.

1951: SECONDO PROBLEMA

FISSATO IN UN PIANO UN SISTEMA DI COORDINATE ORTOGONALI xOy, SI CONSIDERINO LE INFINITE PARABOLE DI EQUAZIONE

$$y = x^2 + px + q$$

DIPENDENTI DAI DUE PARAMETRI p E q.

SI ESPRIMA q PER MEZZO DI p, IN MANIERA CHE DELLE ANZIDETTE PARABOLE SIANO CONSIDERATE SOLTANTO QUELLE I CUI VERTICI APPARTENGONO ALLA PARABOLA DI EQUAZIONE

$$y = -x^2 - 2x + 2$$

SI DETERMININO LE EQUAZIONI DELLE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE O DEGLI ASSI E TANGENTI A UNA DELLE ANZIDETTE PARABOLE; E SI TROVI, IN FUNZIONE DI p, LA LUNGHEZZA DELLA CORDA DEI PUNTI DI CONTATTO.

QUALI SONO LE PARABOLE PER CUI SI HA LA MASSIMA O LA MINIMA CORDA?

Si deve imporre che i vertici delle infinite parabole di equazione

$$y = x^2 + px + q \qquad *$$

passino tutti per la curva di equazione

$$y = -x^2 - 2x + 2 \qquad **$$

Il vertice generico della $*$ ha coordinate

$$\begin{cases} V_x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{p}{2} \\ V_y = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{4q - p^2}{4} \end{cases}$$

Imponiamo che tali coordinate appartengano alla $**$

$$\frac{4q - p^2}{4} = -\frac{p^2}{4} + p + 2$$

Semplificando si ottiene

$$\boxed{q = p + 2}$$

che è la relazione fra p e q richiesta dal problema.

Quindi la $*$ può ora essere scritta in funzione di un solo parametro:

$$y = x^2 + px + p + 2$$

Mettiamo a sistema questa equazione con la retta generica $y = mx$ passante per l'origine e imponiamo la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = x^2 + px + p + 2 \\ y = mx \end{cases} \longrightarrow x^2 + x(p - m) + p + 2 = 0$$

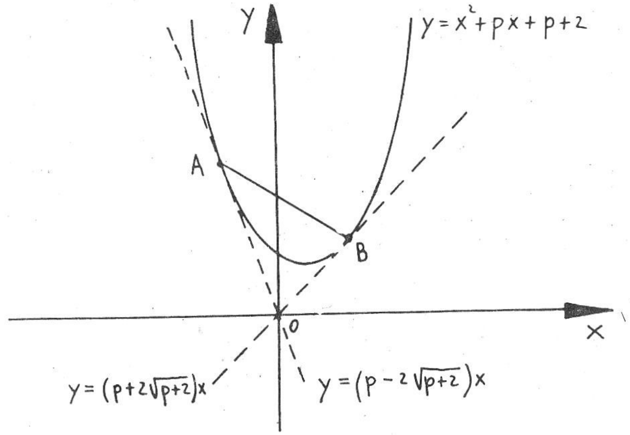
$$\Delta = (p - m)^2 - 4(p + 2) = 0$$

$$m^2 - 2pm + p^2 - 4p - 8 = 0$$

$$m = p \pm 2\sqrt{p + 2}$$

Le rette passanti per l'origine e tangenti alla famiglia di parabole sono allora

$$y = (p \pm 2\sqrt{p + 2})x$$



Calcoliamo le coordinate dei punti di contatto A e B

$$\begin{cases} y = x^2 + px + p + 2 \\ y = (p \pm 2\sqrt{p+2})\,x \end{cases} \longrightarrow x(p \pm 2\sqrt{p+2}) = x^2 + px + p + 2$$

$$x^2 \mp 2x\sqrt{p+2} + p + 2 = 0$$

$$\begin{cases} A \equiv \left(-\sqrt{p+2}\ ;\ p\sqrt{p+2} + 2(p+2)\right) \\ B \equiv \left(\sqrt{p+2}\ ;\ -p\sqrt{p+2} + 2(p+2)\right) \end{cases}$$

La lunghezza della corda è quindi

$$\boxed{\overline{AB} = 2\sqrt{(p+2)(1+p^2)}}$$

Determiniamo infine per quali valori del parametro tale funzione ammette un massimo e un minimo. La derivata è (usando le più consuete variabili x e y)

$$y = 2\sqrt{(x+2)(1+x^2)} \longrightarrow y = 2\sqrt{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

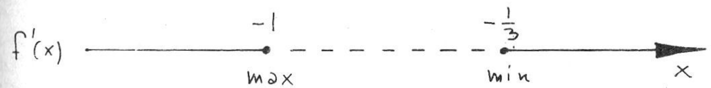
$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{(x+2)(1+x^2)}}$$

Studiamone il segno. Il radicando è positivo per $x > -2$ e perciò la funzione assume valori

reali per $x \geq -2$.

Sotto tale condizione il denominatore è sempre positivo, e quindi è sufficiente studiare il segno del numeratore.

Si ha



La corda AB assume dunque lunghezza massima per

$$\boxed{p = -1}$$

e lunghezza minima per

$$\boxed{p = -\frac{1}{3}}$$