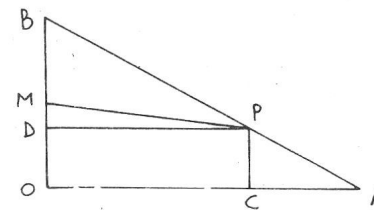


19.

SETTEMBRE 1951  
PRIMO PROBLEMA

IL TRIANGOLO RETTANGOLO AOB HA I CATETI OA, OB DI LUNGHEZZA 2 E  $\sqrt{3}$  RISPETTIVAMENTE. DETERMINARE SULL'IPOTENUSA AB UN PUNTO P IN MODO CHE SIA K LA SOMMA DELLA SUA DISTANZA DAL CATE- TO AO E DEL DOPPIO DELLA SUA DISTANZA DAL PUNTO MEDIO M DEL CATETO OB.

DISCUSSIONE. E' FACOLTATIVA LA RISOLUZIONE GEOMETRICA.



$$OA = 2$$

$$OB = \sqrt{3}$$

$$BM = MO$$

Poniamo  
risulta allora

$$CA = x \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$OC = 2 - x$$

I triangoli BOA e PCA sono simili, e perciò

$$BO:OA = PC:CA \longrightarrow PC = \frac{BO \cdot CA}{OA} = \boxed{x \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Inoltre  $MB = MO - PC = \frac{\sqrt{3}}{2} - x \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \frac{1-x}{2}$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo MDP

$$MP = \sqrt{3 \frac{(1-x)^2}{4} + (2-x)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{7x^2 - 22x + 19}}{2}}$$

Dalla relazione del problema si ottiene

$$\overline{PC} + 2 \cdot \overline{MP} = K \longrightarrow \boxed{x \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{7x^2 - 22x + 19} = K} *$$

che è l'equazione parametrica da discutere -  
Ponendo

$$y = \sqrt{7x^2 - 22x + 19} \quad **$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + K \\ 7x^2 - y^2 - 22x + 19 = 0 \end{cases}$$

sostituendo la \*\* nella \*, e quadrando i due mem

bri della \*\* -

La prima equazione è un fascio di rette parallele con coefficiente angolare  $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , mentre la seconda equazione è una iperbole.

Apriamo una breve parentesi per ricordare che una conica generica ha equazione

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Il tipo di conica è determinato dal discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 & \text{iperbole} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{ellisse (o c.f.)} \end{cases}$$

Per le coniche a centro (cioè tutte tranne le parabole), il centro di simmetria ha coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2dc - be}{\Delta} \\ y_0 = \frac{2ae - bd}{\Delta} \end{cases}$$

Per le iperboli i coefficienti angolari degli asintoti si ottengono uguagliando a zero i soli termini di secondo grado dell'equazione della conica, fatto ritrazzando l'uguaglianza così ottenuta, e considerando tali fattori come rette parallele agli asintoti.

Chiusa questa parentesi sulla teoria generale delle coniche, determiniamo gli elementi caratteristici della conica facente parte del sistema in calce alla pagina precedente -

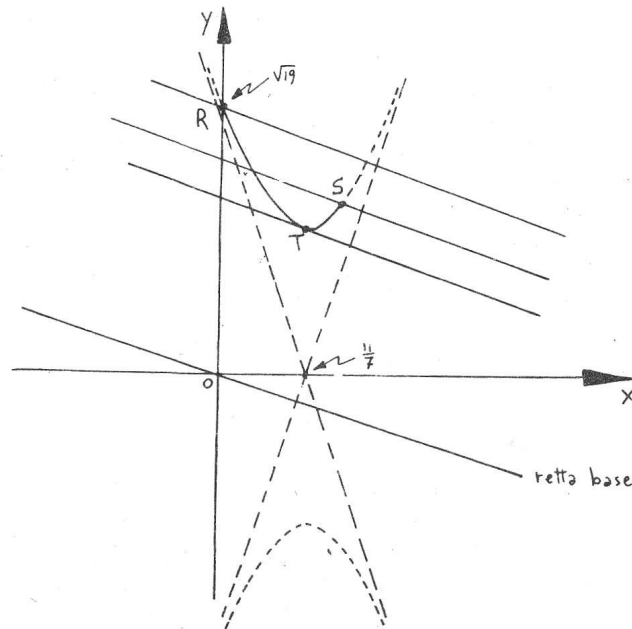
Essendo

$$\Delta = 28 > 0$$

essa è una iperbole.

Il centro di simmetria ha coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \frac{11}{7} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$



L'iperbole non taglia mai l'asse  $x$  e l'asse  $y$  in  $\pm\sqrt{19}$ .

Di essa dobbiamo considerare solo l'arco RS  
con

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{perché è un radicale}$$

si ha  $R \equiv (0; \sqrt{19}) \quad S \equiv (2; \sqrt{3})$

I coefficienti angolari degli asintoti sono

$$7x^2 - y^2 = 0 \rightarrow (\sqrt{7}x - y)(\sqrt{7}x + y) = 0 \rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{7}$$

Applicando la condizione di tangenza fra fascio di rette e iperbole, si trova

$$K = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Quindi al variare di  $K$  si avrà

