20.

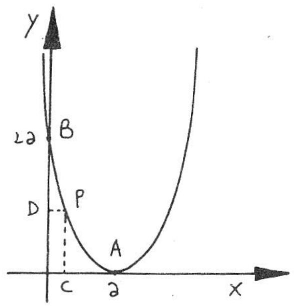
1951: SECONDO PROBLEMA

IN UN PIANO SU CUI E' FISSATO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI xOy SONO STATI DATI I DUE PUNTI $A \equiv (a;0)$, $B \equiv (0;2a)$.

SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA DI VERTICE A, TANGENTE IN A ALL'ASSE DELLE x E PASSANTE PER B.

TROVARE I PUNTI P DELL'ARCO AB DI PARABOLA, LE CUI DISTANZE DAGLI ASSI COORDINATI ABBIANO PER SOMMA UN SEGMENTI DI LUNGHEZZA Ka.

E' FACOLTATIVO DETERMINARE GEOMETRICAMENTE I PUNTI P.



L'equazione generica della parabola è

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

dove abbiamo usato α, β, γ al posto di a, b, c per evitare confusione con le coordinate dei punti A e B.

Imponiamo il passaggio della parabola per tali punti, in modo da eliminare due dei tre parametri

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0 \\ \gamma = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + 2a = 0 \\ \gamma = 2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta = -2 - \alpha a \\ \gamma = 2a \end{cases}$$

Perciò l'equazione della parabola diviene

$$y = \alpha x^2 - (2 + \alpha a)x + 2a$$

per determinare il valore dell'ultimo parametro α, imponiamo la tangenza con l'asse x (di equazione $y = 0$)

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 - (2 + \alpha a)x + 2a \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha x^2 - (2 + \alpha a)x + 2a = 0$$

$$\Delta = (2 + \alpha a)^2 - 8\alpha a = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{2}{a}$$

Quindi la parabola richiesta ha equazione

$$\boxed{y = \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a}$$

Le coordinate di P sono

$$P \equiv \left(x ; \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a\right)$$

Applichiamo la relazione del problema

$$PD+PC = Ka \longrightarrow x + \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a = Ka$$

cioè

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x^2 - 3ax + 2a^2 - Ka^2 = 0 \\ \quad 0 \leq x \leq a \\ K > 0 \qquad\qquad a > 0 \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo $Ka^2 = y$ - Si ha

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3ax + 2a^2 \\ y = Ka^2 \end{cases}$$

cioè una parabola con vertice nel punto

$$V \equiv \left(\frac{3}{4}a \,;\, \frac{7}{8}a^2\right)$$

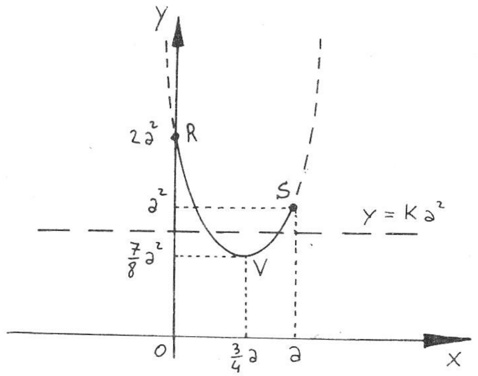
e di cui dovremo considerare solo l'arco RS, dove.

$$R \equiv (0\,;\,2a^2) \qquad\qquad S \equiv (a\,;\,a^2)$$

e un fascio di rette orizzontali.

Determiniamo per quali valori di K la retta generica del fascio passa per V, S, R -

$$V \longrightarrow \frac{7}{8}a^2 = Ka^2 \longrightarrow K = \frac{7}{8}$$



$$S \longrightarrow a^2 = Ka^2 \longrightarrow K = 1$$

$$R \longrightarrow 2a^2 = Ka^2 \longrightarrow K = 2$$

Al variare di K si hanno quindi i risultati seguenti