

Luglio 1952 - Secondo Problema

123

2..

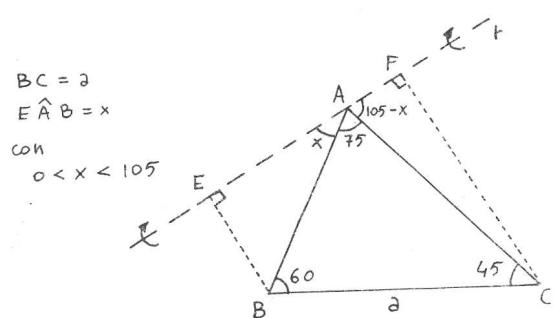
1952: SECONDO PROBLEMA

E' DATO IL TRIANGOLO ABC, DEL QUALE SI CONOSCONO: IL LATO BG DI LUNGHEZZA 2 E GLI ANGOLI DI VERTICI B E C DI AMPIEZZA 60° E 45° RISPETTIVAMENTE. CONDOTTA PER IL VERTICE A UNA RETTA τ NON SECANTE IL TRIANGOLO, SI CONSIDERI IL SOLIDO OTTENUTO MEDIANTE UNA ROTAZIONE COMPLETA DEL TRIANGOLO ATTORNO AD τ .

SI TROVI IL VOLUME V DEL SOLIDO IN FUNZIONE DELL'ANGOLO x CHE UNA DELLE SEMIRETTE DI τ DI ORIGINE A, FORMA CON IL LATO AB; INDI SI VERIFichi L'ESATTEZZA DELL'ESPRESSione DI V CONSIDERANDO QUALCHE POSIZIONE PARTICOLARMENTE NOTEVOLe DELLA RETTA τ (PER ESEMPIO τ PARALLELA A BC).

PER QUALE VALORE DI x IL VOLUME V ASSUME IL VALORE MASSIMO O MINIMO?

IN QUESTI CASI ESTREMI, QUAL'E' L'ANGOLO CHE LA RETTA τ FORMA CON LA MEDIANA AM, RELATIVA AL LATO BC?



Il volume del solido generato dalla rotazione di $\triangle ABC$ attorno ad r , è un tronco di cono (con al = AF) e raggi di base EB e FC) al quale si dà altezza EA e del cono con raggio di base EB e togliere il volume del cono con raggio di base FC e altezza AF.

Occorre quindi determinare i seguenti segmenti
EA, AF, EB, FC

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si trova

$$BC : \sin 75^\circ = AB : \sin 45^\circ \rightarrow AB = a(\sqrt{3} - 1)$$

$$BC : \sin 75^\circ = AC : \sin 60^\circ \rightarrow AC = \frac{a\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

Eliminando i calcoli (piuttosto laboriosi) e ricot-

dando che

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

si ricava

$$\frac{EA}{AB} = \cos x \rightarrow EA = a(\sqrt{3} - 1) \cos x$$

$$\frac{EB}{AB} = \sin x \rightarrow EB = a(\sqrt{3} - 1) \sin x$$

$$\frac{AF}{AC} = \cos(105^\circ - x) \rightarrow AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} [(\sqrt{3} - 2) \cos x + \sin x]$$

$$\frac{FC}{AC} = \sin(105^\circ - x) \rightarrow FC = \frac{a\sqrt{3}}{2} [\cos x - (\sqrt{3} - 2) \sin x]$$

Calcoliamo anche

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AF} = \frac{a}{2} (\sqrt{3} \sin x + \cos x) \\ \overline{EB}^2 = 2a^2 (2 - \sqrt{3}) \sin^2 x \\ \overline{FC}^2 = \frac{3a^2}{4} [\cos^2 x + (7 - 4\sqrt{3}) \sin^2 x + (4 - 2\sqrt{3}) \sin x \cos x] \end{array} \right.$$

Il volume del solido è

$$V = V_{\text{tronco}} - V_{\text{cono } AFC} - V_{\text{cono } ABE} = \frac{\pi \cdot \overline{EF}}{3} (\overline{FC}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{FC} \cdot \overline{EB}) - \frac{\pi \cdot \overline{FC}^2}{3} \cdot \overline{AF} - \frac{\pi \cdot \overline{EB}^2}{3} \cdot \overline{AE}$$

Deriviamo

$$V' = p [3q \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + q(\cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x) - 3 \sin x \cos^2 x]$$

semplifichiamo e uguagliamo a zero

$$p [-\sin^3 x + q \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + q \cos^3 x] = 0$$

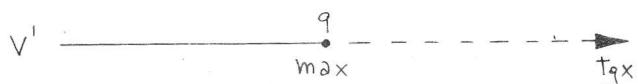
dividiamo per p , cambiamo segno e dividiamo ancora per $\cos^3 x$ - Si ha

$$\tan^3 x - q \tan^2 x + \tan x - q = 0$$

che si annulla solo per

$$\tan x = q$$

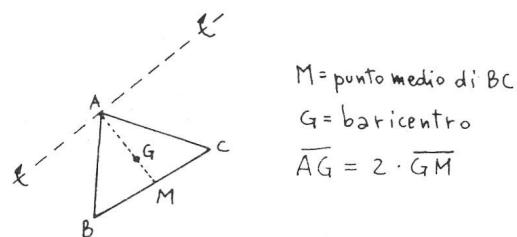
Lo studio del segno fornisce



Quindi il volume acquista valore massimo quando

$$x = \arctan \frac{12 - 5\sqrt{3}}{3}$$

Per rispondere all'ultima domanda occorre ricordare il teorema di Guldino secondo cui il volume di un solido di rotazione è dato dal prodotto dell'area della superficie che ruotando genera, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di tale superficie.



M = punto medio di BC

G = baricentro

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

Poiché l'area del triangolo è costante, il volume del solido di rotazione è massimo quando il baricentro (contenuto nella mediana AM) si trova a distanza massima dall'asse di rotazione. E ciò avviene quando l'asse di rotazione è perpendicolare alla mediana AM .

N.B. Nel teorema di Guldino l'asse di rotazione deve essere esterno alla superficie e ciò, nel nostro caso, è verificato.