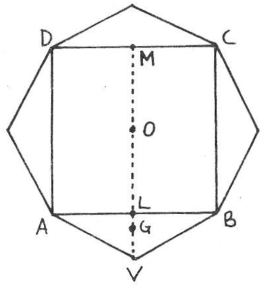
23.

SETTEMBRE 1952

QUATTRO TRIANGOLI ISOSCELI, UGUALI E COMPLANARI, HANNO COME BASI I LATI DI UN QUADRATO, NON HANNO PUNTI IN COMUNE, ED INOLTRE SONO O TUTTI ESTERNI O TUTTI INTERNI AL QUADRATO: ESSI, CON I LORO LATI UGUALI, DETERMINANO UN OTTAGONO EQUILATERO.

SI SA CHE SONO UGUALI AL SEGMENTO a I QUATTRO SEGMENTI CIASCUNO DEI QUALI CONGIUNGE IL PUNTO MEDIO DELLA BASE DI UNO DEI TRIANGOLI COL BARICENTRO DEL TRIANGOLO NON CONTIGUO; E SI SA, ALTRESÌ, CHE L'OTTAGONO PREDETTO È EQUIVALENTE A UN QUADRATO, IL CUI LATO POSSIEDE, RISPETTO AD a, LA MISURA DATA K. TROVARE LE MISURE DELLA BASE E DELL'ALTEZZA DEI QUATTRO TRIANGOLI.

DISCUTERE, DISTINGUENDO IL CASO DELL'OTTAGONO CONVESSO, REGOLARE O NO, DA QUELLO DELL'OTTAGONO CONCAVO NONCHÈ IL CASO CHE L'OTTAGONO POSSA ESSERE CONSIDERATO COME LO SVILUPPO PIANO DI UNA PIRAMIDE REGOLARE.



$MG = a$

Poniamo $LG = x$

risulta $GV = 2x$ e perciò $\boxed{LV = 3x}$

è inoltre

$ML = AB = a - x$ e perciò $\boxed{LB = \frac{a-x}{2}}$

Esaminiamo gli intervalli entro cui può variare la x. Quando la x è negativa V è interno al quadrato e l'ottagono è concavo.

Il valore minimo per la x si ha quando

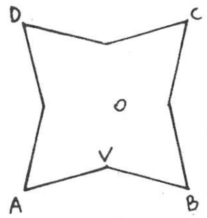
$$V \equiv O$$

cioè

$$LV = -LB$$

$$3x = -\frac{a-x}{2}$$

$$x = -\frac{a}{5}$$



e l'ottagono degenera in una croce.

L'ottagono è invece regolare quando $OB = OV$ cioè

$$\begin{cases} \overline{OB} = \sqrt{2\cdot\overline{LB}^2} = \overline{LB}\cdot\sqrt{2} = (a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \overline{OV} = \overline{LB} + \overline{LV} = \frac{a-x}{2} + 3x = \frac{a+5x}{2} \end{cases}$$

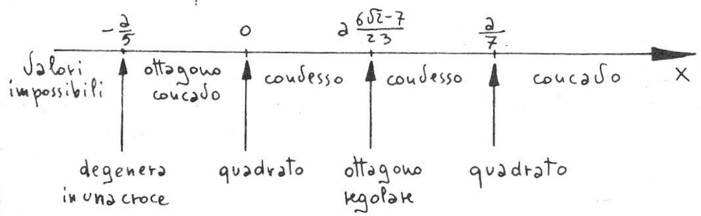
$$(a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a+5x}{2}$$

$$x = a\,\frac{6\sqrt{2}-7}{23}$$

L'ottagono diviene invece un quadrato (con superficie doppia rispetto a quello di lato AB), quando $LB = LV$. Cioè

$$\frac{a-x}{2} = 3x \longrightarrow x = \frac{a}{7}$$

Per valori maggiori di x l'ottagono ridiventa concavo e corrisponde allo sviluppo di una piramide regolare. Riassumendo si ha



Applichiamo ora la relazione del problema

$$S_{ottagono} = S_{quadrato\ di\ lato\ Ka}$$

cioè

$$S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABV} = K^2 a^2$$

$$(a-x)^2 + 4\,\frac{(a-x)\cdot 3x}{2} = K^2 a^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 5x^2 - 4ax + K^2a^2 - a^2 = 0 \\ -\frac{a}{5} < x < \infty \qquad K > 0 \end{array}}$$

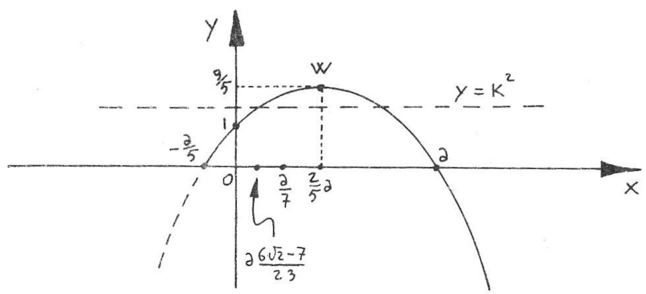
Ponendo $K^2 = y$, si ottiene

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{a^2}x^2 + \frac{4}{a}x + 1 \\ y = K^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette orizzontali (esistenti solo nel semipiano delle y positive) e una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso e vertice nel punto

$$W \equiv \left(\frac{2}{5}a\ ;\ \frac{9}{5}\right)$$

Di essa dovremo considerare solo i punti con ascissa maggiore di $-\frac{a}{5}$.



Si hanno quindi sempre due soluzioni per

$$0 < K^2 \le \frac{9}{5}$$

cioè

$$\boxed{0 < K \le \frac{3\sqrt{5}}{5}}$$