24.

LUGLIO 1953

RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 = kx + (k-1)y + (1-k) \\ y^2 = -kx + (1-k)y + k \end{cases}$$

TENENDO PRESENTE CHE, QUALUNQUE SIA IL VALORE DEL PARAMETRO K, AMMETTE LA SOLUZIONE $x=1$, $y=0$ – DETERMINARE POI PER QUALI VALORI DEL PARAMETRO I VALORI x, y DELLE SOLUZIONI RISULTANO REALI E CONCORDI OPPURE REALI E DISCORDI –

NEL CASO PARTICOLARE DI $k=\frac{1}{2}$, INTERPRETANDO x ED y COME COORDINATE DI UN PUNTO DEL PIANO, SI DISEGNINO I GRAFICI DELLE DUE EQUAZIONI DEL SISTEMA –

FACOLTATIVAMENTE, NEL PREDETTO CASO DI $k=\frac{1}{2}$, SI CALCOLI L'AREA DI UNA QUALUNQUE DELLE DUE REGIONI FINITE DEL PRIMO QUADRANTE, DETERMINATE DALLE DUE CURVE –

$$\begin{cases} x^2 = kx + (k-1)y + (1-k) \\ y^2 = -kx + (1-k)y + k \end{cases}$$

Si tratta di due fasci di parabole, rispettivamente con asse verticale e orizzontale.

Il sistema è di quarto grado ed avrà quindi quattro soluzioni (reali o complesse).

Per risolvere il sistema conviene sommare membro a membro le due equazioni ottenendo

$$x^2 + y^2 = 1$$

e associare a questa la seconda equazione esplicitata rispetto alla x.

Si ha quindi il nuovo sistema

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\dfrac{y^2}{k} + \dfrac{1-k}{k}\,y + 1 \end{cases}} \qquad (1)$$

equivalente a quello iniziale.

Sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha

$$y^4 + y^3(2k-2) + y^2(2k^2-4k+1) + y(2k-2k^2) = 0$$

$$y\left[y^3 + y^2(2k-2) + y(2k^2-4k+1) + 2k - 2k^2\right] = 0$$

Una soluzione (in accordo con quanto suggerito

dal testo) è quindi

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}}$$

dove la x è stata ottenuta sostituendo $y=0$ nella seconda equazione delle (1).

Rimane l'equazione di terzo grado

$$y^3 + y^2(2k-2) + y(2k^2-4k+1) + 2k - 2k^2 = 0$$

che si annulla, come è facile constatare, per $y=1$. Possiamo allora fattorizzarla con il metodo di Ruffini

	1	$2k-2$	$2k^2-4k+1$	$2k-2k^2$
1		1	$2k-1$	$2k^2-2k$
	1	$2k-1$	$2k^2-2k$	//

$$(y-1)\left[y^2 + y(2k-1) + 2k^2 - 2k\right] = 0$$

Un'altra soluzione è perciò

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}}$$

dove la x è stata ottenuta come in precedenza.

Resta l'equazione di secondo grado

$$y^2 + y(2k-1) + 2k^2 - 2k = 0$$

che risolta fornisce

$$\boxed{y = \frac{1-2k \pm \sqrt{1+4k-4k^2}}{2}} \quad (2)$$

sostituendo al solito nella seconda equazione delle (1) e semplificando, dopo calcoli leggermente laboriosi, si ottiene

$$\boxed{x = \frac{2k-1 \pm \sqrt{1+4k-4k^2}}{2}} \quad (3)$$

dove il doppio segno deve essere preso superiore o inferiore in entrambe le espressioni.

Le prime due soluzioni non dipendono dal parametro k, quindi tutte le parabole dei due fasci passano per i punti

$$A \equiv (1;0) \qquad B \equiv (0;1)$$

Le altre due soluzioni fornite dalle (2) e (3) corrispondono a soluzioni reali per

$$\Delta = 1 + 4k - 4k^2 \geq 0$$

cioè

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Esse poi sono concordi se il loro prodotto è po-

sitivo, cioè

$$\frac{1-2k \pm \sqrt{\Delta}}{2} \cdot \frac{2k-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

$$\left(\pm\sqrt{\Delta} + 1 - 2k\right) \cdot \left(\pm\sqrt{\Delta} + 2k - 1\right) > 0$$

$$\left[\pm\sqrt{\Delta} + (1-2k)\right] \cdot \left[\pm\sqrt{\Delta} - (1-2k)\right] > 0$$

$$\Delta - (1-2k)^2 > 0$$

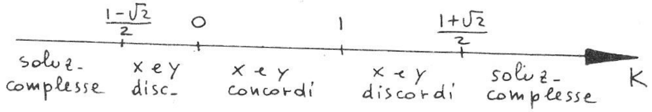
$$\left(1 + 4k - 4k^2\right) - \left(1 + 4k^2 - 4k\right) > 0$$

$$-8k^2 + 8k > 0$$

$$k(1-k) > 0$$

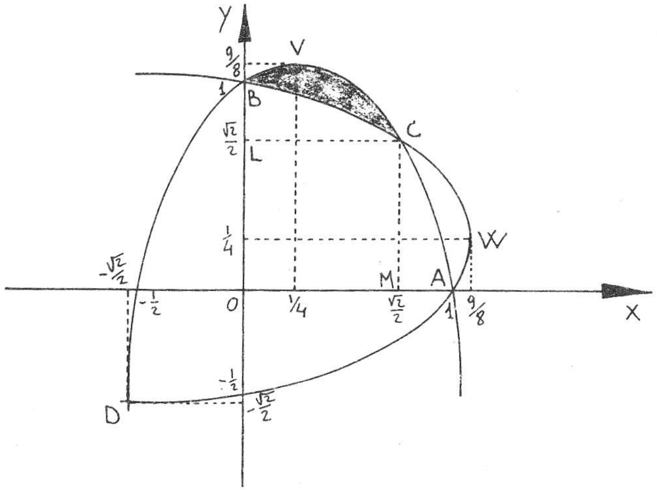
$$0 < k < 1$$

Si avrà quindi la situazione seguente



Ponendo ora $k = \frac{1}{2}$ i fasci danno luogo alle due parabole

$$\begin{cases} y = -2x^2 + x + 1 \\ x = -2y^2 + y + 1 \end{cases}$$



$V \equiv \left(\frac{1}{4} ; \frac{9}{8}\right) \quad W \equiv \left(\frac{9}{8} ; \frac{1}{4}\right) \quad C \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad D \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Calcoliamo infine la superficie della regione colorata.

Essa può essere scomposta nel modo seguente

$$S = S_{OBVCM} - S_{OLCM} - S_{BLC}$$

dove OLCM è un quadrato e la regione BLC è identica, per simmetria, alla regione CMA.
Quindi

$$S = S_{OBVCM} - S_{CMA} - \overline{OM}^2$$

cioè

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-2x^2+x+1\right) dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(-2x^2+x+1\right) dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+3}{12} - \frac{7-4\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2}-5}{6}$$