25.

SETTEMBRE 1953

È DATA LA CURVA

$$ay = x^2 - a^2$$

DELLA QUALE SIANO A IL PUNTO DI ORDINATA NULLA E ASCISSA NEGATIVA E B QUELLO DI ORDINATA NULLA E ASCISSA POSITIVA.

CONDOTTA PER A UNA RETTA DI COEFFICIENTE ANGOLARE m, SI INDICHINO CON C L'ALTRA INTERSEZIONE CON LA PARABOLA E CON D LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI C SULL'ASSE DELLE x.

DETERMINARE LA RETTA PER A IN MODO CHE:

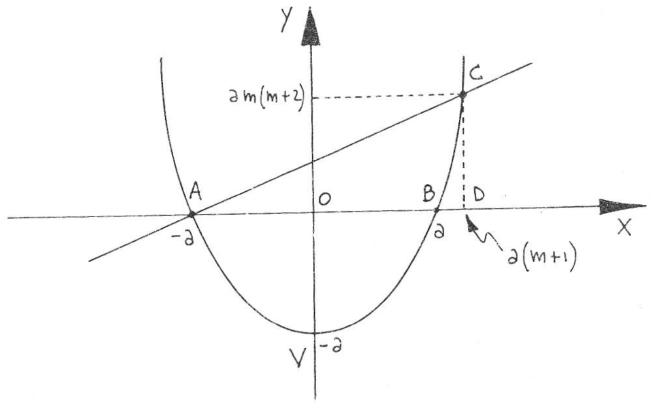
1° – L'AREA DEL TRIANGOLO ACD SIA UGUALE A ha^2m^2 (CON $h>0$)

2° – L'AREA DELLA PARTE FINITA DI PIANO LIMITATA DALL'ASSE DELLE x, DALLA RETTA AC E DALL'ARCO BC DI PARABOLA SIA Ka^2m^2 (CON $K>0$)

La curva data, posta nella forma

$$y = \frac{1}{a}x^2 - a$$

è facilmente riconoscibile come una parabola.



Il vertice ha coordinate $V \equiv (0; -a)$

Il fascio di rette con centro A ha equazione

$$y = m(x+a)$$

Calcoliamo le coordinate di A e C risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} - a \\ y = m(x+a) \end{cases}$$

Per confronto dei secondi membri si ottiene

$$x^2 - max - a^2 - ma^2 = 0$$

$$x = \begin{cases} ma + a \\ -a \end{cases}$$

e cioè

$$A \equiv (-a; 0) \qquad C \equiv (ma + a; m^2a + 2am)$$

La base e l'altezza del triangolo ACD sono perciò

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = am + 2a \\ \overline{CD} = m^2a + 2am \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$\frac{\overline{AD} \cdot \overline{CD}}{2} = ha^2m^2 \longrightarrow \boxed{m^2 - 2m(h-2) + 4 = 0} \quad (1)$$

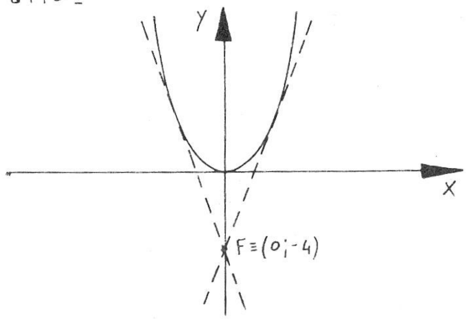
che è l'equazione parametrica da discutere, senza alcuna limitazione per la variabile m e con $h>0$.

Poniamo

$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$

si ottiene
$$\begin{cases} y = x(2h-4)-4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette con centro F ≡ (0 ; -4) (determinato assegnando ad h due valori arbitrari, per esempio h = 2 e h = 0, e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute), e una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto.



La retta del fascio è tangente o secante la parabola quando
$$\Delta = (2h-4)^2 - 16 \geq 0$$
cioè
$$\boxed{0 < h \leq 4}$$

Entro tale intervallo il problema ammette

sempre due soluzioni perchè vi sono due intersezioni fra retta del fascio e parabola.

Passiamo ora alla determinazione dell'area del triangoloide BCD (che risulterà espressa in funzione della variabile m)
$$S_{BCD} = \int_a^{a+am} \left(\frac{x^2}{a} - a\right) dx = \left[\frac{x^3}{3a} - ax\right]_a^{a+am} = \frac{a^2m^2(m+3)}{3}$$

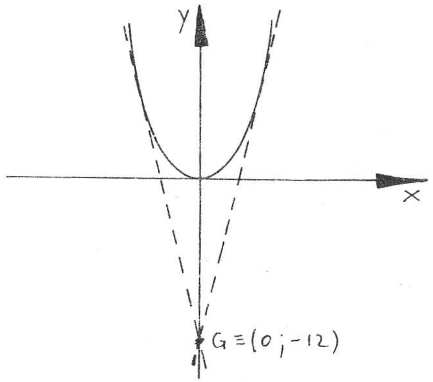
L'area del triangoloide ACB è allora
$$S_{ACB} = S_{ACD} - S_{BCD}$$
cioè
$$S_{ACB} = \frac{a^2m\,(m+2)^2}{2} - \frac{a^2m^2(m+3)}{3}$$

Applicando la relazione del problema si ha
$$S_{ACB} = Ka^2m^2 \longrightarrow \boxed{m^2 - m(6K-6) + 12 = 0} \quad (2)$$

che è la seconda equazione parametrica da discutere, con K > 0.

Ponendo come prima
$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$
si ha
$$\begin{cases} y = x(6K-6) - 12 \\ y = x^2 \end{cases}$$

cioè ancora un fascio di rette con centro $G \equiv (0;-12)$ e una parabola.



La retta del fascio è tangente o secante la parabola se

$$\frac{\Delta}{4} = (3K-3)^2 - 12 \geq 0$$

cioè

$$K \leq \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \qquad K \geq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Ma dovendo essere $K > 0$, ne deriva che il problema ammette sempre due soluzioni quando

$$\boxed{K \geq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$$