

Settembre 1954

157

SETTEMBRE 1954

UNA SEMICIRCONFERENZA HA IL DIAMETRO AB DI LUNGHEZZA $2r$.

NEL SEMIPIANO CHE LA CONTIENE SIA DATO SULLA TANGENTE IN A UN PUNTO M TALE CHE $AM = 4r$.

DETERMINARE SULLA SEMICIRCONFERENZA I PUNTI P , PER I QUALI SUSSISTA LA RELAZIONE

$$\overline{MP} = \overline{AP} + k \cdot \overline{BP}$$

ESSENDO k UN NUMERO REALE ASSEGNATO.
DISCUSSIONE.

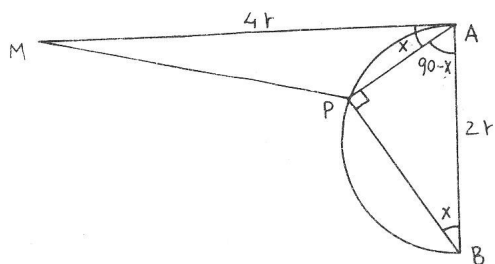
FACOLTATIVO:

SI SUPPONGA $AM = mr$, CON m POSITIVO.
SI PONGA $\hat{ABP} = x$.

Poniamo come consigliato

$$\hat{ABP} = x \quad \text{con} \quad 0 \leq x < 90$$

e calcoliamo AP e BP nel triangolo APB .



$$\frac{AP}{AB} = \sin x \quad \longrightarrow \quad AP = 2r \sin x$$

$$\frac{BP}{AB} = \cos x \quad \longrightarrow \quad BP = 2r \cos x$$

Poichè $\hat{PAB} = 90 - x$, risulta $\hat{MAP} = x$ e quindi applicando il teorema di Carnot al triangolo MAP, si ha

$$\begin{aligned} \overline{MP} &= \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{PA}^2 - 2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{PA} \cdot \cos x} = \\ &= \sqrt{16r^2 + 4r^2 \sin^2 x - 2 \cdot 4r \cdot 2r \sin x \cdot \cos x} = \\ &= 2r \sqrt{4 + \sin^2 x - 4 \sin x \cos x} = \\ &= 2r \sqrt{4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x - 4 \sin x \cos x} = \\ &= 2r \sqrt{5 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} \end{aligned}$$

Applichiamo ora la relazione del problema

$$\overline{MP} = \overline{AP} + K \cdot \overline{BP}$$

$$2r \sqrt{5 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} = 2r \sin x + 2r K \cos x$$

dividendo i due membri per $2r \cos x$, si ottiene

$$\boxed{\sqrt{5 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 4} = \operatorname{tg} x + K} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} x \geq 0$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = X \\ \sqrt{5 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 4} = Y \end{cases}$$

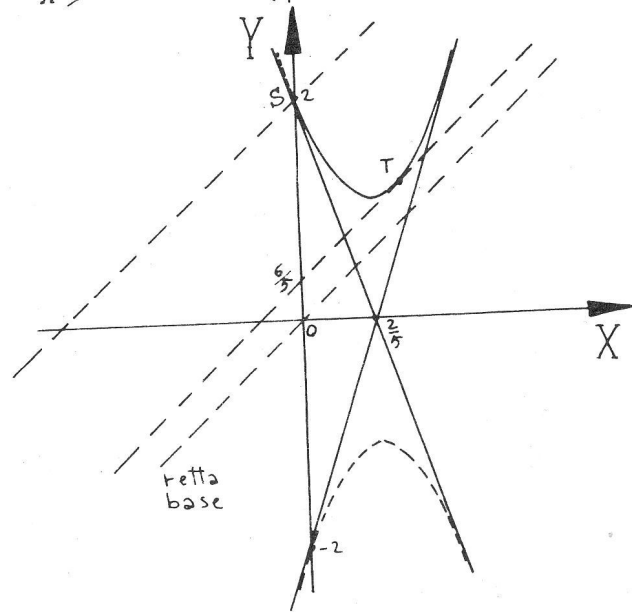
Dalla (1) si ottiene

$$\begin{cases} Y = X + K \\ 5X^2 - 4X + 4 = Y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + K \\ 5X^2 - Y^2 - 4X + 4 = 0 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e una iperbole traslata (che tratteremo utilizzando i concetti

già accennati nel primo problema del settembre 1951), di cui dovremo considerare solo il ramo con $X \geq 0$ e $Y \geq 0$ (perché è un radicale) -



$\Delta = 20 > 0$ e perciò la conica è un'iperb.

Coordinate del centro di simmetria

$$x_0 = \frac{2dc - be}{\Delta} = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = \frac{2ae - bd}{\Delta} = 0$$

Uguagliando a zero i termini di secondo grado della conica, si ha

$$5x^2 - y^2 = 0 \rightarrow (\sqrt{5}x + y)(\sqrt{5}x - y) = 0$$

e perciò i coefficienti angolari degli asintoti sono

$$m = \pm\sqrt{5}$$

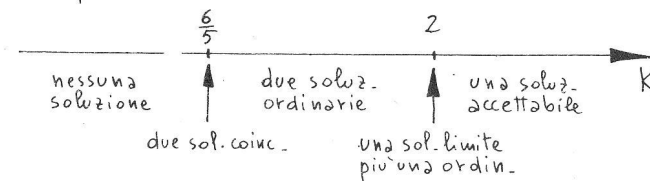
L'iperbole taglia l'asse y nei punti ± 2 e non taglia mai l'asse x.

La retta del fascio è tangente all'iperbole per

$$\frac{\Delta}{4} = (k+2)^2 - 4(4-k^2) = 0 \rightarrow k = \begin{matrix} \nearrow \frac{6}{5} \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

La soluzione positiva corrisponde alla tangenza in T, l'altra è da scartare.

La retta del fascio passa per S quando $k=2$. Si ha perciò



Non conviene discutere graficamente la generalizzazione facoltativa ($AM=mr$) perché troppo complessa.