28.

LUGLIO 1955

IN UN PIANO RIFERITO AD UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI xOy, SONO DATE LA CIRCONFERENZA DI EQUAZIONE

$$x^2+y^2=r^2$$

E LE RETTE DI EQUAZIONI

$$y=-r\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad y=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

TALI RETTE INCONTRANO LA CIRCONFERENZA RISPETTIVAMENTE NEI PUNTI A, B E C, D.

SI DETERMINI SUL SEGMENTO CD UN PUNTO P, TALE CHE RISULTI

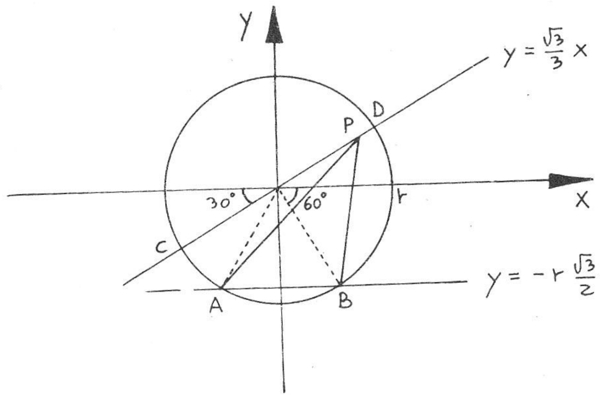
$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=K\cdot\overline{AB}^2$$

ESSENDO K UN NUMERO POSITIVO.

Determiniamo anzitutto le coordinate dei punti A, B, C, D

$$A\equiv\left(-\frac{r}{2};-r\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad B\equiv\left(\frac{r}{2};-r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C \equiv \left(-r\frac{\sqrt{3}}{2} \, ; -\frac{r}{2}\right) \qquad D \equiv \left(r\frac{\sqrt{3}}{2} \, ; \frac{r}{2}\right)$$



Il punto P ha coordinate

$$P \equiv \left(x \, ; \frac{\sqrt{3}}{3} x\right)$$

e, essendo vincolato fra C e D, deve essere

$$\boxed{-r\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq r\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Determiniamo ora le lunghezze dei lati del triangolo PAB.

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

$$\overline{PA}^2 = \left(x+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 + 2rx + r^2$$

$$\overline{PB}^2 = \left(x-\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 + r^2$$

Quindi, applicando la relazione del problema si ottiene

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = K \cdot \overline{AB}^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 + 2rx + r^2 + \frac{4}{3}x^2 + r^2 = K \cdot r^2$$

$$\boxed{8x^2 + 6rx + 6r^2 - 3Kr^2 = 0}$$

che è l'equazione parametrica da discutere.

Ponendo $3Kr^2 = y$ si ottiene

$$\begin{cases} y = 3Kr^2 \\ y = 8x^2 + 6rx + 6r^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette orizzontali (con $K > 0$), e una parabola con vertice nel punto

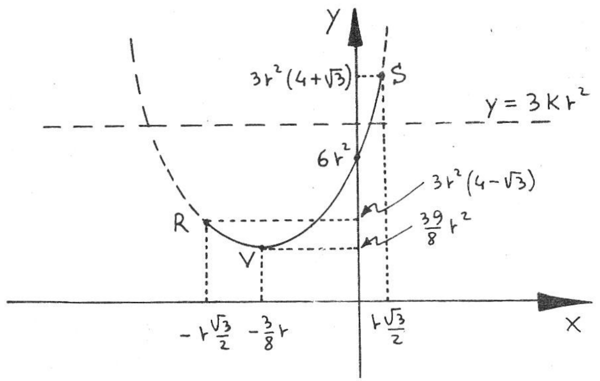
$$V \equiv \left(-\frac{3}{8}r \, ; \frac{39}{8}r^2\right)$$

e concavità verso l'alto.

I punti estremi dell'arco di parabola che dobbiamo considerare hanno coordinate

$$R \equiv \left(-r\frac{\sqrt{3}}{2} \, ; 3r^2(4-\sqrt{3})\right)$$

$$S \equiv \left(r\frac{\sqrt{3}}{2} \, ; 3r^2(4+\sqrt{3})\right)$$



(Il grafico non è disegnato in scala per visualizzare più chiaramente la situazione).

Determiniamo per quali valori del parametro K la retta del fascio passa per i punti V, R, S.

$V \longrightarrow \frac{39}{8}r^2 = 3Kr^2 \longrightarrow K = \frac{13}{8}$

$R \longrightarrow 3r^2(4-\sqrt{3}) = 3Kr^2 \longrightarrow K = 4-\sqrt{3}$

$S \longrightarrow 3r^2(4+\sqrt{3}) = 3Kr^2 \longrightarrow K = 4+\sqrt{3}$

Si ha quindi