31.

SETTEMBRE 1956

SIA CD UNA CORDA DI UNA DATA SEMICIRCONFERENZA DI CENTRO O E DIAMETRO AB, E SIA E IL PUNTO COMUNE AI PROLUNGAMENTI DELLE CORDE AC, BD. SAPENDO CHE

$$CD = \frac{7}{25} AB$$

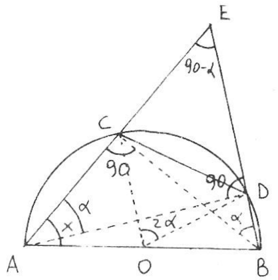
SI DETERMINI L'AMPIEZZA x DELL'ANGOLO $O\hat{A}C$, IN MODO CHE ABBIA LUOGO LA RELAZIONE

$$\frac{AE}{AB} + \frac{13}{25} \frac{BE}{AB} = K$$

ESSENDO K UN NUMERO POSITIVO ASSEGNATO.

N.B. SI OSSERVI CHE I DUE TRIANGOLI ECD ED EBA SONO SIMILI. SI CONSIGLIA POI DI INDICARE CON 2α L'AMPIEZZA DELL'ANGOLO $C\hat{O}D$ E DI CALCOLARE PRELIMINARMENTE I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI α.

FACOLTATIVAMENTE IL CANDIDATO PUÒ TRATTARE IL CASO PIÙ GENERALE IN CUI AL RAPPORTO $\frac{13}{25}$ SIA SOSTITUITO UN SECONDO PARAMETRO m.



Poichè $C\hat{O}D = 2\alpha$ risultano $C\hat{A}D = C\hat{B}D = \alpha$ perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco dell'angolo al centro $C\hat{O}D$.

Sono inoltre retti gli angoli

$$A\hat{C}B = E\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{D}E = 90°$$

Calcoliamo i valori delle funzioni trigonometriche per l'angolo α.

Per il teorema della corda è $CD = AB \operatorname{sen}\alpha$ ma per la relazione fornita dal problema è anche $CD = \frac{7}{25} AB$ e quindi confrontando i due secondi membri si ha

$$AB \operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25} AB \longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$$

Risulta allora

$$\begin{cases} \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7}{24} \end{cases}$$

Poniamo ora

$$E\hat{A}B = x \qquad (\text{con } \alpha < x < 90)$$

Si ha

$$\frac{AC}{AB} = \cos x \longrightarrow \boxed{AC = AB \cos x}$$

$$\frac{CB}{AB} = \operatorname{sen} x \longrightarrow CB = AB \operatorname{sen} x$$

$$\frac{CE}{CB} = \operatorname{tg}\alpha \longrightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{7}{24} \longrightarrow \boxed{CE = \frac{7}{24} AB \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{AD}{AB} = \cos(x-\alpha) \longrightarrow AD = \frac{AB}{25}(7 \operatorname{sen} x + 24 \cos x)$$

$$\frac{DB}{AB} = \operatorname{sen}(x-\alpha) \longrightarrow \boxed{DB = \frac{AB}{25}(24 \operatorname{sen} x - 7 \cos x)}$$

$$\frac{ED}{AD} = \operatorname{tg}\alpha \longrightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{7}{24} \longrightarrow \boxed{ED = \frac{7 \cdot AB}{600}(7 \operatorname{sen} x + 24 \cos x)}$$

e ancora

$$\begin{cases} AE = AC + CE = AB \cos x + \frac{7}{24} AB \operatorname{sen} x = AB\left(\frac{7}{24} \operatorname{sen} x + \cos x\right) \\ EB = ED + DB = \cdots\cdots = AB \cdot \frac{25}{24} \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \frac{7}{24} \operatorname{sen} x + \cos x \\ \frac{EB}{AB} = \frac{25}{24} \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{AE}{AB}+\frac{13}{25}\,\frac{BE}{AB}=K$$

$$\frac{7}{24}\operatorname{sen}x+\cos x+\frac{13}{25}\,\frac{25}{24}\operatorname{sen}x=K$$

$$\boxed{\begin{array}{c}5\operatorname{sen}x+6\cos x=6K\\ \alpha<x<90\\ K>0\end{array}}\qquad(1)$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

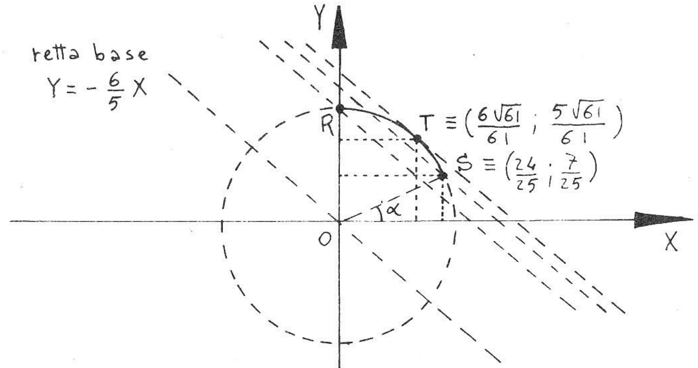
$$\begin{cases}\cos x = X\\ \operatorname{sen}x = Y\end{cases}$$

e associando alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria. Si ottiene

$$\begin{cases}6X+5Y=6K\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m=-\frac{6}{5}$ e un arco di circonferenza (con centro nell'origine e raggio unitario), pari ad $\overset{\frown}{RS}$ con estremi corrispondenti ai limiti $x=\alpha$ e $x=90$.

Si ha il grafico seguente



La retta del fascio passa per

$$\begin{cases}R & \text{quando} & K=\frac{5}{6}\\ S & \text{quando} & K=\frac{179}{150}\\ T & \text{quando} & K=\frac{\sqrt{61}}{6}\end{cases}$$

Si ha quindi la situazione seguente