34.

LUGLIO 1958

SONO DATE LE DUE PARABOLE DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = x^2 + 3x + 2 \end{cases}$$

DETTO $A = (-1;0)$ IL PUNTO CHE ESSE HANNO IN COMUNE E CONSIDERATA UNA RETTA r PASSANTE PER A E NON PARALLELA ALL'ASSE DELLE ORDINATE, SIANO:

- B L'ULTERIORE INTERSEZIONE DI r CON LA PRIMA PARABOLA.
- C L'ULTERIORE INTERSEZIONE DI r CON LA SECONDA PARABOLA.
- D L'INTERSEZIONE DI r CON L'ASSE DELLE ORDINATE.

SI DETERMINI IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DI r IN MODO CHE RISULTI

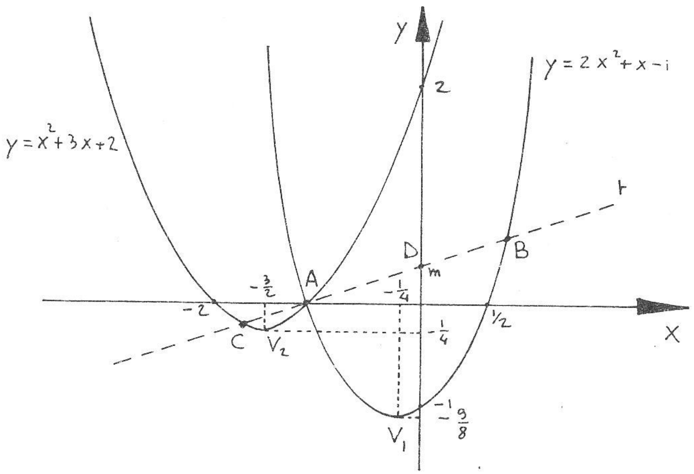
$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{k}{AD}$$

ESSENDO k UN NUMERO REALE ASSEGNATO.

NEL CASO DI k POSITIVO, SI DETERMINI L'EVENTUALE MASSIMO DI k AL VARIARE DI m.

Le due parabole hanno vertici nei punti

$$V_1 \equiv \left(-\frac{1}{4} ; -\frac{9}{8}\right) \qquad V_2 \equiv \left(-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$$



Il fascio di rette passanti per A ha equazione

$$y = mx + m$$

Ne consegue che

$$\begin{cases} B \equiv \left(\frac{m+1}{2} ; \frac{m^2+3m}{2}\right) \\ C \equiv \left(m-2 ; m^2-m\right) \\ D \equiv (0 ; m) \end{cases}$$

Calcoliamo la lunghezza dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{m^2+3m}{2}\right)^2} = \frac{(m+3)\sqrt{m^2+1}}{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{m^2+1}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(m-2+1)^2+(m^2-m)^2} = \sqrt{m^4-2m^3+2m^2-2m+1} =$$

$$= (m-1)\sqrt{m^2+1}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AC}} = \frac{k}{\overline{AD}} \longrightarrow \frac{2}{(m+3)\sqrt{m^2+1}} - \frac{1}{(m-1)\sqrt{m^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{m^2+1}}$$

cioè

$$\frac{2}{m+3} - \frac{1}{m-1} = k$$

sotto la condizione $m \neq 1$ e $m \neq -3$ si ha infine

$$\boxed{\begin{array}{c} km^2 - m(1-2k) + (5-3k) = 0 \\ -\infty < m < \infty \qquad \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases} \end{array}}$$

Poniamo $\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$

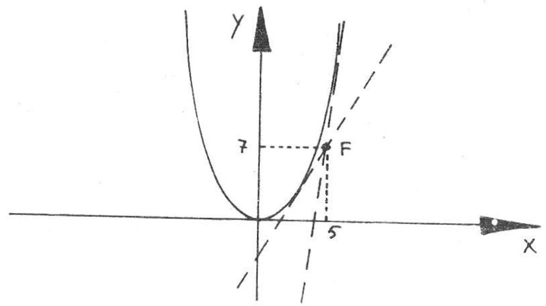
si ha

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1-2K}{K}x + \dfrac{3K-5}{K} \end{cases}$$

cioè una parabola e un fascio di rette con centro

$$F \equiv (5;7)$$

(come si può ricavare assegnando a K due valori arbitrari, per esempio $K=0$ e $K=\frac{1}{2}$, e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute).



Si avranno sempre due soluzioni per

$$\Delta = \left(\frac{1-2K}{K}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3K-5}{K} \geq 0$$

cioè

$$\begin{cases} K \leq \dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ K \geq \dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

eccetto che per $K=0$ per cui si ha una sola soluzione (retta verticale).

Riprendiamo in esame la funzione

$$K = \frac{2}{m+3} - \frac{1}{m-1}$$

e troviamone il massimo.

La derivata è

$$K' = -\frac{2}{(m+3)^2} + \frac{1}{(m-1)^2}$$

Uguagliando a zero e risolvendo si ha

$$-m^2 + 10m + 7 = 0$$

Si ha quindi il massimo cercato per

$$\boxed{m = 5+4\sqrt{2}}$$

in corrispondenza del quale è

$$K = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$