

35.

SETTEMBRE 1958

È DATO UN TRAPEZIO $ABCD$, RETTANGOLO IN A E IN D , AVENTE LE BASI AB E DC E L'ALTEZZA AD RISPETTIVAMENTE UGUALI A $5a$, $4a$, $2a$.

SE CON P SI DENOTA UN PUNTO INTERNO AL TRAPEZIO, DI CUI H E K SONO LE PROIEZIONI ORTOGONALI SU BC E SU AD , SI TROVI P IN MODO CHE SIANO SODDISFATTE LE RELAZIONI

$$\frac{PH}{PK} = \frac{AD}{BC}$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{DP}^2 = k a^2$$

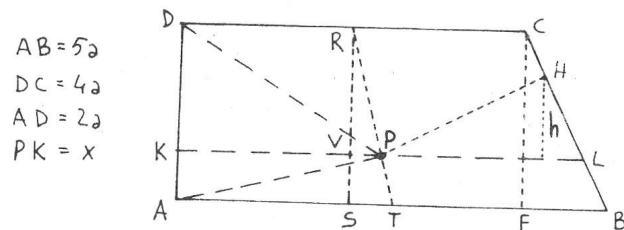
ESSENDO k UN NUMERO POSITIVO DATO.
DISCUSSIONE.

Risulta

$$BC = \sqrt{FC^2 + FB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

Poniamo

$$PK = x$$


$$PH = \frac{PK \cdot AD}{BC} = \frac{x \cdot 22}{2\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{5}$$
$$CF : BC = PH : PL$$
$$PL = \frac{BC \cdot PH}{CF} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \frac{2 \times \sqrt{5}}{5}}{22} = X$$
$$PK = PL$$

Anche i due triangoli RST e RVP sono simili tra loro (ma non sono simili ai due precedenti). Essendo

$$PV = x - 2a$$

$$RV:VP = RS:ST$$

$$RV = \frac{VP \cdot RS}{ST} = \frac{(x-22) \cdot 22}{\frac{2}{2}} = 4(x-22)$$

E' percio'.

$$AK = 22 - (4x - 82) = 102 - 4x$$

ed infine

$$\begin{cases} \overline{PD}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{PK}^2 = 17x^2 - 642x + 642^2 \\ \overline{AP}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{PK}^2 = 17x^2 - 802x + 1002^2 \end{cases}$$

Applicando la seconda relazione del proble=
ma, si ha

$$\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 = K a^2$$

Cioè

$$34x^2 - 1442x + 2^2(164 - k) = 0$$

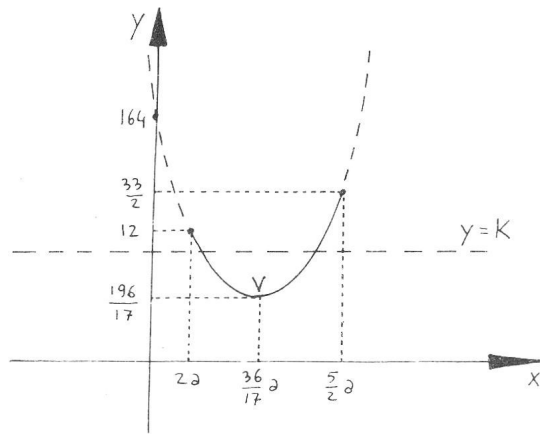
Quando $P \equiv R$ e $x = 2a$, e quando $P \equiv T$ e $x = \frac{5}{2}a$, quindi $\underline{\hspace{2cm}}$

$$2a < x < \frac{5}{2}a \quad (\text{con } a > 0)$$

Ponendo $K = y$ si ha

$$\begin{cases} y = \frac{34}{a^2} x^2 - \frac{144}{a} x + 164 \\ y = K \end{cases}$$

cioè un arco di parabola con ascisse comprese fra $2a$ e $\frac{5}{2}a$, e un fascio di rette orizzontali



Si hanno due soluzioni per

$$\frac{196}{17} \leq K < 12$$

e una soluzione per

$$12 \leq K < \frac{33}{2}$$