

36.

LUGLIO 1959

IL TRIANGOLO ABC HA I LATI AB E AC DI LUNGHEZZA RISPETTIVAMENTE 5 E 4 E L'ANGOLO FRA ESSI COMPRESO È DI 60° . LA BISETTRICE DELL'ANGOLO \hat{A} DEL TRIANGOLO INTERSECA IL LATO OPPOSTO IN S .

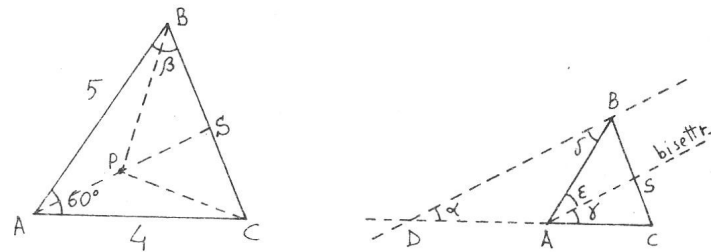
CALCOLARE LA LUNGHEZZA DEL LATO BC E DELLE PARTI IN CUI ESSO È DIVISO DAL PUNTO S E SUCCESSIVAMENTE SI DETERMINI IL COSENO DELL'ANGOLO \hat{ABC} E QUINDI LA LUNGHEZZA DI AS .

GIÒ FATTO, SI TROVI SUL SEGMENTO AS UN PUNTO P , TALE CHE LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE SUE DISTANZE DAI TRE VERTICI DEL TRIANGOLO SIA EQUIVALENTE AD UN QUADRATO DI LATO K . DISCUSSIONE.

FACOLTATIVAMENTE SI RISOLVA IL PROBLEMA PER VIA GEOMETRICA.

Con Carnot

$$BC = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{21}$$



Prima di proseguire osserviamo la costruzione realizzata nella figura di destra: Tracciamo la retta passante per B e parallela alla bisettrice, e prolunghiamo AC fino ad incontrare in D la retta precedente.

Il triangolo ABD è isoscele perché gli angoli α e γ sono corrispondenti e quindi uguali fra loro. Gli angoli ϵ e δ sono anch'essi uguali fra loro perché alterni interni.

Essendo $\epsilon = \gamma$ risulta anche $\alpha = \delta$ e il triangolo è isoscele.

Inoltre per il teorema di Talete (fascio di rette tagliate da due trasversali), si ha

$$AC : AD = CS : SB$$

ma, essendo isoscele ABD, si può anche scrivere

$$AC : AB = CS : SB$$

Poniamo ora $BS = x$

La proporzione diventa

$$4 : 5 = (\sqrt{21} - x) : x$$

Risolvendo si ha

$$x = \frac{5\sqrt{21}}{9}$$

e quindi

$$\boxed{BS = \frac{5\sqrt{21}}{9}}$$

$$\boxed{SC = \frac{4\sqrt{21}}{9}}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot per calcolare il $\cos \beta$.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$16 = 25 + 21 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{21}} = \boxed{\frac{\sqrt{21}}{7}}$$

Applichiamo ancora Carnot per determinare AS.

$$AS = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BS}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BS} \cdot \cos \beta} = \boxed{\frac{20\sqrt{3}}{9}}$$

Passiamo ora alla seconda parte del problema ponendo

$$AP = x \quad (\text{con } 0 \leq x \leq \frac{20\sqrt{3}}{9})$$

208

Luglio 1959

Calcoliamo \overline{PB}^2 e \overline{PC}^2 applicando nuovamente il teorema di Carnot.

$$\begin{cases} \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 30 = x^2 - 5\sqrt{3}x + 25 \\ \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 30 = x^2 - 4\sqrt{3}x + 16 \end{cases}$$

Imponiamo finalmente la relazione indicata dal problema

$$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = K^2$$

si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} 3x^2 - 9\sqrt{3}x + 41 - K^2 &= 0 \\ 0 \leq x &\leq \frac{20\sqrt{3}}{9} \end{aligned}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo $K^2 = y$. Si ha

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 9\sqrt{3}x + 41 \\ y = K^2 \end{cases}$$

cioè un arco di parabola con asse verticale, concavità verso l'alto, vertice nel punto.

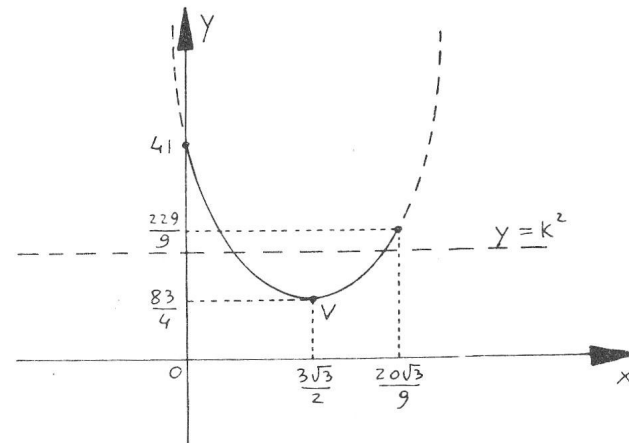
$$V \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} ; \frac{83}{4} \right)$$

e di cui dovremo considerare solo l'arco con ascisse comprese fra 0 e $\frac{20\sqrt{3}}{9}$, e un fascio

Luglio 1959

209

di rette orizzontali.



Si hanno due soluzioni per

$$\frac{83}{4} \leq K^2 \leq \frac{229}{9}$$

e una soluzione per

$$\frac{229}{9} < K^2 \leq 41$$