37.

SETTEMBRE 1959

RIFERITI I PUNTI DI UN PIANO AD UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI xOy, SI DISEGNI LA PARABOLA DI EQUAZIONE

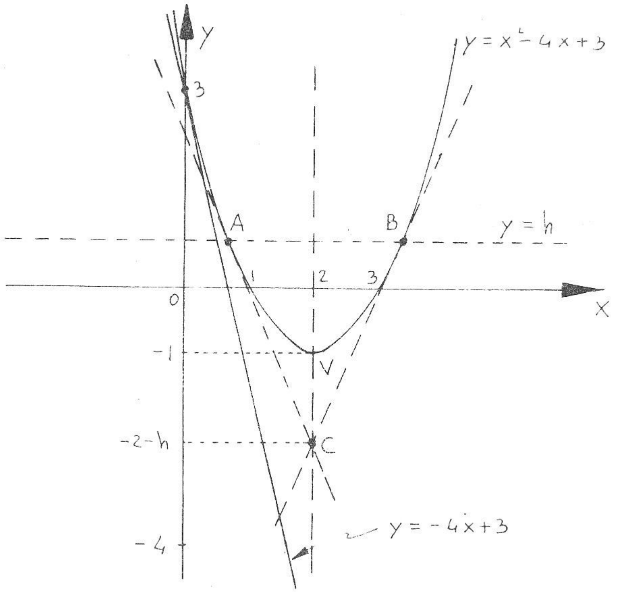
$$y = x^2 - 4x + 3$$

E SI SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE AD ESSA NEL PUNTO D'INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE y – SUCCESSIVAMENTE:

a – SEGATA LA CURVA CON UNA RETTA GENERICA DI EQUAZIONE $y = h$, SI DIMOSTRI ANALITICAMENTE, O GEOMETRICAMENTE, CHE LE TANGENTI ALLA PARABOLA NEI PUNTI D'INTERSEZIONE CON LA RETTA CONSIDERATA S'INCONTRANO IN PUNTI AVENTI TUTTI LA STESSA ASCISSA –

b – SI DETERMINI POI h IN MODO CHE L'INTERSEZIONE FRA LE DUE TANGENTI ABBIA ORDINATA -4 –

c – SEGATA INFINE LA PARABOLA CON UNA RETTA GENERICA PARALLELA ALLA BISETTRICE DEL PRIMO E TERZO QUADRANTE, SI DISCUTANO I SEGNI DELLE ASCISSE DELLE INTERSEZIONI NEL CASO CHE QUESTE RISULTINO REALI –



La derivata della parabola è

$$y' = 2x - 4$$

Il coefficiente angolare della retta tangente nel punto di ascissa $x = 0$ è

$$f'(0) = -4$$

e quindi la retta tangente ha equazione

$$y - 3 = m(x - 0) \longrightarrow \boxed{y = -4x + 3}$$

Rispondiamo al quesito a. La parabola è simmetrica rispetto al suo asse (di equazione $x=2$) e la generica retta orizzontale $y = h$ taglia la parabola in due punti (A e B) tali che le rette tangenti alla parabola in tali punti hanno coefficiente angolare uguale ma di segno opposto.

I punti di intersezione delle due rette tangenti debbono quindi giacere sull'asse della parabola, e hanno perciò tutti ascissa pari a 2.

Analiticamente si ha:

$$\begin{cases} A \equiv \left(2 - \sqrt{1+h}\,;\, h\right) \\ B \equiv \left(2 + \sqrt{1+h}\,;\, h\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'\left(2 - \sqrt{1+h}\right) = -2\sqrt{1+h} \\ f'\left(2 + \sqrt{1+h}\right) = 2\sqrt{1+h} \end{cases}$$

Le due rette tangenti in A e B hanno equazione

$$\begin{cases} y - h = -2\sqrt{1+h}\left(x - 2 + \sqrt{1+h}\right) \\ y - h = 2\sqrt{1+h}\left(x - 2 - \sqrt{1+h}\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{1+h}\,(x-2) - 2 - h \\ y = 2\sqrt{1+h}\,(x-2) - 2 - h \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per confronto, si ha

$$x = 2$$

qualunque sia il valore di h, quindi il punto C ha sempre ascissa $x = 2$.

Sostituendo tale valore in una delle due rette tangenti, si determina anche l'ordinata del punto C.

$$y = 2\sqrt{1+h}\,(2-2) - 2 - h = -2 - h \longrightarrow C \equiv (2; -2-h)$$

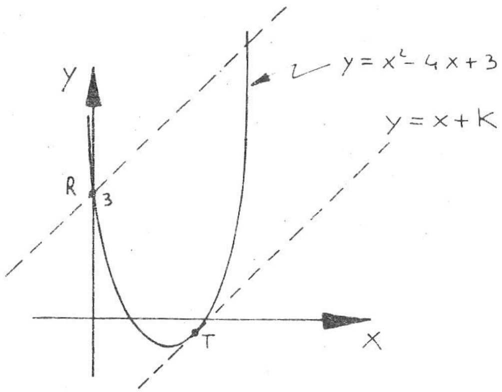
Imponendo che l'ordinata di C sia uguale a -4, si ha la risposta al quesito b.

$$-2-h=-4 \longrightarrow \boxed{h=2}$$

Rispondiamo all'ultimo quesito mettendo a sistema la parabola con il fascio di rette parallele

$$y = x + K$$

La retta del fascio passa per R quando $K = 3$.



Si ha invece la tangenza in T quando

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x + K \end{cases} \longrightarrow x^2 - 5x + 3 - K = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(3-K) = 0$$

$$K = -\frac{13}{4}$$

Quindi avremo la situazione seguente