38.

LUGLIO 1960

È DATO IL TRAPEZIO ABCD, RETTANGOLO IN A E IN D, NEL QUALE LA BASE MAGGIORE AB, LA BASE MINORE DC E L'ALTEZZA AD HANNO RISPETTIVAMENTE LE LUNGHEZZE 2b, b, h.

SI DETERMINI SU AD UN PUNTO P IN MODO CHE BC RISULTI IPOTENUSA DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO DI CATETI RISPETTIVAMENTE UGUALI A CP E ALLA METÀ DI BP.

È FACOLTATIVA LA RISOLUZIONE GEOMETRICA.

$AB = 2b$

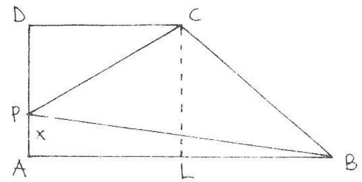
$DC = b$

$DA = h$

$PA = x$

con $0 \le x \le h$

Risulta



$$\overline{BC}^2 = h^2 + b^2$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{DC}^2 = (h-x)^2 + b^2$$

$$\overline{PB} = \sqrt{x^2+4b^2}$$

$$\frac{\overline{PB}}{2} = \frac{\sqrt{x^2+4b^2}}{2}$$

Imponendo la condizione del problema, si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{PC}^2 + \left(\frac{\overline{PB}}{2}\right)^2$$

$$h^2+b^2 = (h-x)^2 + b^2 + \frac{x^2+4b^2}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5x^2 - 8hx + 4b^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq h \\ h > 0 \qquad b > 0 \end{array}}$$

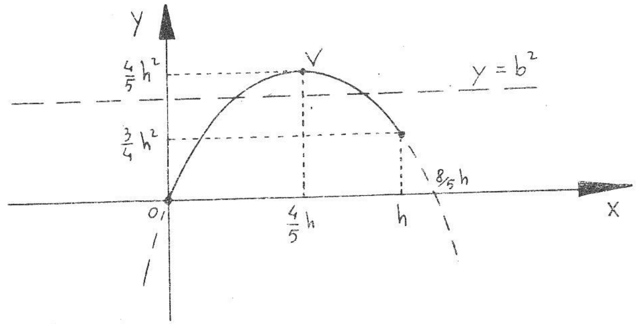
L'equazione parametrica ha due parametri (h e b). Il risultato della discussione fornirà le relazioni che collegano uno dei due parametri all'altro: è perciò indifferente eseguire la discussione rispetto ad "h" o a "b".

Discutiamo rispetto a "b", perchè "h" è presente nelle limitazioni della variabile x.

Ponendo $b^2 = y$ si ha

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x^2 + 2hx \\ y = b^2 \end{cases}$$

cioè un arco di parabola con ascisse comprese fra 0 e h, e un fascio di rette orizzontali.



Si ha una soluzione per

$$0 \leq b^2 < \frac{3}{4}h^2$$

$$\boxed{0 \leq b < \frac{h\sqrt{3}}{2}} \quad \text{oppure} \quad h > \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

e due soluzioni per

$$\frac{3}{4}h^2 \leq b^2 \leq \frac{4}{5}h^2$$

$$\boxed{\frac{h\sqrt{3}}{2} \leq b \leq \frac{2h\sqrt{5}}{5}}$$

oppure

$$\frac{2b\sqrt{3}}{3} \leq h \leq \frac{b\sqrt{5}}{2}$$