SETTEMBRE 1960

IN UN PIANO, SUL QUALE E' FISSATO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI xOy, SI CONSIDERINO LE CURVE DI EQUAZIONE

$$y = a^2x^3 - 3a(2a-3)x^2 + 9(a-1)(a-3)x + b$$

ESSENDO a E b DUE PARAMETRI, DETERMINANDO QUELLE PARTICOLARI CURVE PER LE QUALI IL PUNTO DI MINIMO E IL PUNTO DI MASSIMO HANNO LE ORDINATE RISPETTIVAMENTE UGUALI A ZERO E AD UNO.

TROVATE LE ASCISSE DEI PUNTI DI MINIMO E DI MASSIMO E QUELLE DEGLI ALTRI PUNTI DI QUESTE PARTICOLARI CURVE, CHE APPARTENGONO ALLE RETTE DI EQUAZIONI $y=0$ E $y=1$, SI CALCOLINO PER CIASCUNA CURVA LE AREE DELLE REGIONI FINITE DELIMITATE DALLA CURVA E DALLE RETTE DI CUI SOPRA.

LIMITATAMENTE AD UNA DELLE CURVE PARTICOLARI SI SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE y, CHE PASSA PER IL PUNTO DI MASSIMO DELLA CURVA E PER I DUE SUOI PUNTI DI ORDINATA NULLA, E SI CALCO-

LI L'AREA DELLA REGIONE PARABOLICA I CUI PUNTI HANNO ORDINATA POSITIVA E NON MAGGIORE DI QUELLA DEL PREDETTO PUNTO DI MASSIMO.

Derivando si ha

$$y' = 3a^2x^2 - 6ax(2a-3) + 9(a^2-4a+3)$$

uguagliando a zero e risolvendo si ottiene

$$a^2x^2 - 2ax(2a-3) + 3a^2 - 12a + 9 = 0$$

$$x = \frac{2a-3 \pm a}{a} = \begin{cases} \dfrac{3a-3}{a} \\[2mm] \dfrac{a-3}{a} \end{cases}$$

Per distinguere quale dei due valori è l'ascissa del massimo e quale del minimo, sostituiamoli nella derivata seconda

$$y'' = 6a^2x - 6a(2a-3) \longrightarrow \begin{cases} f''\left(\dfrac{3a-3}{a}\right) = 6a^2 > 0 & \text{minimo} \\[2mm] f''\left(\dfrac{a-3}{a}\right) = -6a^2 < 0 & \text{massimo} \end{cases}$$

Imponiamo ora che l'ordinata del minimo sia 0 e l'ordinata del massimo sia 1.

$$f\left(\frac{3a-3}{a}\right) = a^2\left(\frac{3a-3}{a}\right)^3 - 3a(2a-3)\left(\frac{3a-3}{a}\right)^2 + 9(a-1)(a-3)\frac{3a-3}{a} + b = 0$$

$$-27(a-1)^2 + ab = 0$$

$$\boxed{ab = 27(a-1)^2} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{a-3}{a}\right) = a^2\left(\frac{a-3}{a}\right)^3 - 3a(2a-3)\left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 9(a-1)(a-3)\frac{a-3}{a} + b = 1$$

$$\frac{(a-3)^2}{a}(4a-3) + b - 1 = 0$$

$$\boxed{b = 1 + \frac{(a-3)^2(3-4a)}{a}} \quad (2)$$

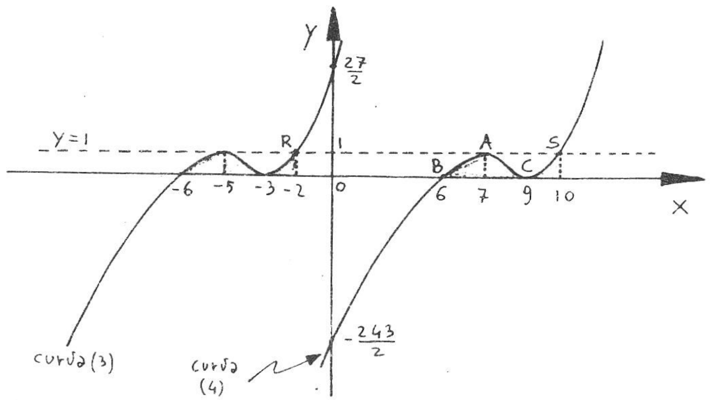
Risolvendo il sistema costituito dalle (1) e (2) si ottiene (tenendo presente che deve essere $a \neq 0$)

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{27}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{243}{2} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione iniziale, si hanno le due curve

$$\boxed{y = \frac{x^3}{4} + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2}} \quad (3)$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{4} - 6x^2 + \frac{189}{4}x - \frac{243}{2}} \quad (4)$$



$R \equiv (-2;1)$ $\qquad S \equiv (10;1)$

Calcoliamo le aree delle superfici colorate

$$S_3 = \int_{-6}^{-2} \left(\frac{x^3}{4} + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2} \right) dx = 2$$

$$S_4 = \int_{6}^{10} \left(\frac{x^3}{4} - 6x^2 + \frac{189}{4}x - \frac{243}{2} \right) dx = 2$$

Determiniamo infine l'equazione della parabola con asse verticale e che passa per i punti A, B, C.

Imponendo il passaggio dell'equazione generica $y = ax^2 + bx + c$ per tali punti, si ha il sistema

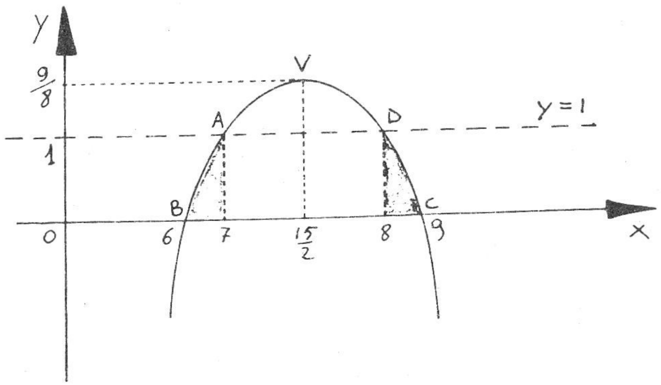
$$\begin{cases} 1 = 49a + 7b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \\ 0 = 81a + 9b + c \end{cases}$$

Risolvendo

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{15}{2} \\ c = -27 \end{cases}$$

Perciò la parabola ha equazione

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 27}$$



Il grafico non è in scala. Le due zone colorate sono uguali per simmetria.

L'area di una di esse è

$$S = \int_6^7 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{15}{2}x - 27\right) dx = \frac{7}{12}$$

e perciò la somma dell'area delle due regioni è

$$\boxed{S = \frac{7}{6}}$$