40.

LUGLIO 1961

INDICATO CON VV' UN DIAMETRO DI UNA SFERA DI CENTRO O E RAGGIO r, SI CONSIDERINO I SEGUENTI QUATTRO CONI:

1°) IL CONO DI VERTICE O, ASSE OV' E BASE TANGENTE ALLA SFERA.

2°) IL CONO OPPOSTO AL VERTICE DEL PRECEDENTE, AVENTE LA CIRCONFERENZA DI BASE SULLA SUPERFICIE SFERICA.

3°) IL CONO DI VERTICE V, ASSE VV', APERTURA METÀ DI QUELLA DEI DUE CONI PRECEDENTI E INSCRITTO NELLA SFERA.

4°) IL CONO DI VERTICE V', INSCRITTO NELLA SFERA E AVENTE LA STESSA BASE DI QUELLA DEL TERZO CONO.

DOPO DI CIÒ, INDICATI CON V_1, V_2, V_3, V_4 RISPETTIVAMENTE I VOLUMI DEI QUATTRO CONI, SI DETERMINI L'ANGOLO DI APERTURA DEL PRIMO CONO IN MODO CHE SIA SODDISFATTA LA RELAZIONE

$$\frac{V_1 - V_2}{V_4} - (K-3)\frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2K$$

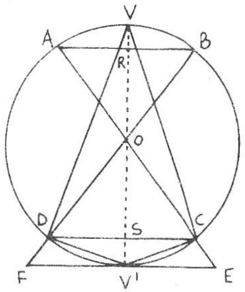
CON K NUMERO REALE DATO. DISCUSSIONE.

$OB = r$

$OS = OR = x$

con

$0 < x < r$



$V_1 \equiv OFE$

$V_2 \equiv OAB$

$V_3 \equiv VDC$

$V_4 \equiv V'DC$

Nel triangolo rettangolo OSC è

$$SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Poichè il triangolo OV'E è simile al triangolo OSC, si ha

$$OS : SC = OV' : V'E$$

$$V'E = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{OV'}}{\overline{OS}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2} \cdot r}{x}$$

Per il cono generato dal triangolo OFE si ha perciò

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \overline{V'E}^2 \cdot \overline{OV'}}{3} = \boxed{\frac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2}}$$

Nel triangolo rettangolo ORB è

$$RB = SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

e perciò

$$V_2 = \frac{\pi \, \overline{RB}^2 \cdot \overline{OR}}{3} = \boxed{\frac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}$$

Nel triangolo rettangolo VSC si ha

$$VS = r + x \qquad SC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

e perciò

$$V_3 = \frac{\pi \cdot \overline{SC}^2 \cdot \overline{VS}}{3} = \boxed{\frac{\pi (r^2 - x^2)(r + x)}{3}}$$

Nel triangolo rettangolo V'SC si ha

$$V'S = r - x$$

e perciò

$$V_4 = \frac{\pi \cdot \overline{SC}^2 \cdot \overline{V'S}}{3} = \boxed{\frac{\pi (r^2 - x^2)(r - x)}{3}}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{V_1 - V_2}{V_4} - (k-3) \frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2k$$

$$\frac{\dfrac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2} - \dfrac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}{\dfrac{\pi (r^2 - x^2)(r - x)}{3}} - (k-3) \frac{\dfrac{\pi r^3 (r^2 - x^2)}{3x^2} + \dfrac{\pi x (r^2 - x^2)}{3}}{\dfrac{\pi (r^2 - x^2)(r + x)}{3}} = 2k$$

$$\frac{\dfrac{r^3}{x^2} - x}{r - x} - (k-3) \frac{\dfrac{r^3}{x^2} + x}{r + x} = 2k$$

sotto la condizione $x \neq 0$ e $x \neq \pm r$, si trova

$$\boxed{x^2 (4 - 3k) + r x (k - 2) - r^2 (k - 4) = 0}$$

$$\boxed{0<x<r}$$

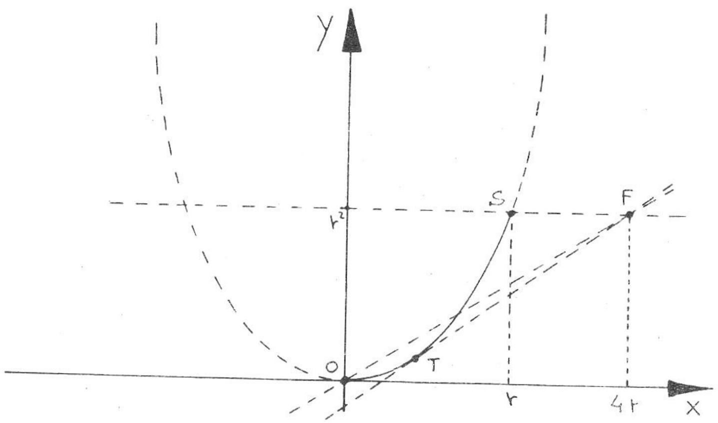
Eseguiamo la discussione grafica ponendo $x^2=y$. Si ottiene

$$\begin{cases} y = \dfrac{r(2-k)}{4-3k}x + r^2\dfrac{k-4}{4-3k} \\ y = x^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette con centro nel punto

$$F\equiv(4r;r^2)$$

(come si può ricavare dando a k due valori arbitrari, per esempio $k=2$ e $k=0$, e determinando l'intersezione delle due rette così ottenute) e una parabola con ascisse comprese fra 0 e r.



Imponiamo alla retta del fascio il passaggio per S, O, T.

$$S\equiv(r;r^2) \longrightarrow r^2 = r^2\frac{2-k}{4-3k} + r^2\frac{k-4}{4-3k} \longrightarrow k=2$$

$$O\equiv(0;0) \longrightarrow r^2\frac{k-4}{4-3k} = 0 \longrightarrow k=4$$

$$T \longrightarrow \Delta = r^2\frac{(2-k)^2}{(4-3k)^2} + 4r^2\frac{k-4}{4-3k} = 0 \longrightarrow k=\frac{30\pm4\sqrt{15}}{11}$$

Le due soluzioni corrispondono approssimativamente a $k=\frac{30-4\sqrt{15}}{11}\cong 1,4$
$k=\frac{30+4\sqrt{15}}{11}\cong 4,1$
Il primo valore è da scartare (corrisponde alla tangenza in un punto della parabola molto superiore ad S), mentre il secondo valore corrisponde alla tangenza in T (perchè il valore differisce di poco da quello ottenuto per il passaggio in O).

Quindi si ha una soluzione per

$$2<k\le 4$$

e due soluzioni per

$$4<k\le\frac{30+4\sqrt{15}}{11}$$