41.

SETTEMBRE 1961

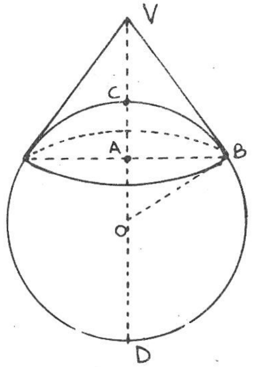
DATA UNA SFERA DI CENTRO O E RAGGIO r, SI CONDUCA UN PIANO SECANTE NON PASSANTE PER IL CENTRO E SI INDICHINO: CON S L'AREA DELLA SUPERFICIE DELLA SFERA; CON S_1 L'AREA DELLA CALOTTA MAGGIORE CHE COSÌ SI OTTIENE; CON S_2 L'AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE DEL CONO AVENTE PER BASE IL CERCHIO SEZIONE COSÌ OTTENUTO E LE GENERATRICI TANGENTI ALLA SFERA.

SI DETERMINI LA DISTANZA DEL PIANO SECANTE DAL CENTRO O IN MODO CHE SI ABBIA

$$S_2 + kS_1 = 2S$$

CON K NUMERO POSITIVO DATO.

ESPRIMENDO POI K IN FUNZIONE DELLA DISTANZA DEL PIANO SECANTE DAL CENTRO DELLA SFERA, SI STUDI L'ANDAMENTO DI TALE FUNZIONE.



$OB = r$
$AO = x$
con $0 \leq x \leq r$

Per valori di x compresi fra 0 e $-r$ si hanno situazioni simmetriche e il cono si trova nella parte inferiore della sfera.

Si ha

$$\begin{cases} S = 4 \cdot \pi \cdot \overline{OB}^2 \\ S_1 = 2\pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{AD} \\ S_2 = \pi \cdot \overline{AB} \cdot \overline{VB} \end{cases}$$

È anche

$$\overline{AD} = r + x$$
$$\overline{AB} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

I triangoli ABO e VBO sono simili, e perciò

$$VB : OB = AB : AO \longrightarrow \overline{VB} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{AB}}{\overline{AO}} \longrightarrow VB = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{x}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} S = 4\pi r^2 \\ S_1 = 2\pi r(r + x) \\ S_2 = \dfrac{\pi r (r^2 - x^2)}{x} \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema, si ha

$$S_2 + k S_1 = 2S$$

$$\frac{\pi r (r^2 - x^2)}{x} + k \cdot 2\pi r (r + x) = 8\pi r^2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^2(2k - 1) - 2rx(4 - k) + r^2 = 0 & \\ 0 \leq x \leq r & k > 0 \end{array}}$$

Ponendo $x^2 = y$ si ottiene il sistema

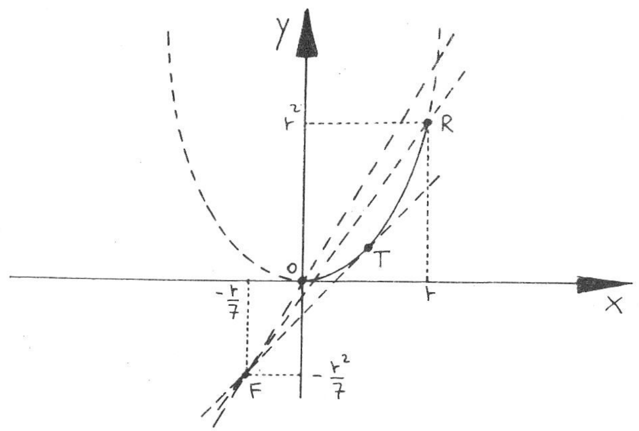
$$\begin{cases} y = 2rx\,\dfrac{4 - k}{2k - 1} - \dfrac{r^2}{2k - 1} \\ y = x^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv \left(-\frac{r}{7}\,;\,-\frac{r^2}{7}\right)$$

e una parabola con centro nell'origine, asse verticale e ascisse comprese fra 0 ed r.

Imponendo il passaggio del fascio di rette per i punti O, R, T si trovano i seguenti valori di k

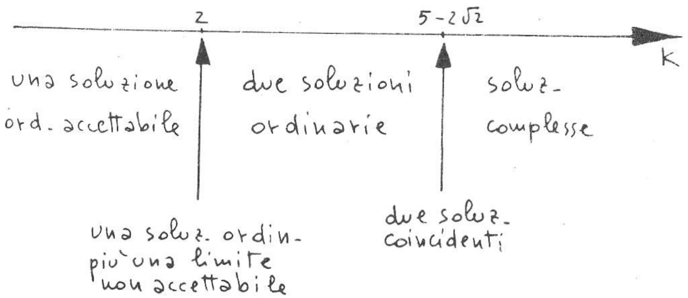


R $\longrightarrow$ $K = 2$

O $\longrightarrow$ $k = -\infty$

T $\longrightarrow$ $k = 5 - 2\sqrt{2}$

e perciò si ha



Riprendiamo l'equazione parametrica

$$x^2(2K-1) - 2rx(4-K) + r^2 = 0$$

ed esplicitiamo il parametro K. Si ottiene

$$\boxed{K = \frac{x^2 + 8rx - r^2}{2x(x+r)}}$$

funzione algebrica di terzo grado, con $0 < x < r$, con due asintoti verticali di equazione

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -r \end{cases}$$

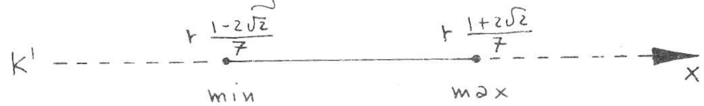
e uno orizzontale di equazione

$$y = \frac{1}{2}$$

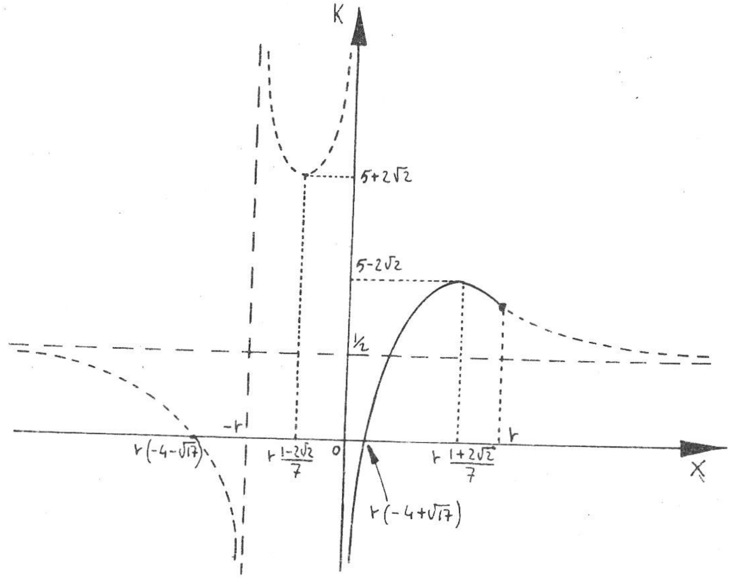
La derivata prima è

$$K' = \frac{-2r(7x^2 - 2rx - r^2)}{(2x^2 + 2rx)^2}$$

e lo studio del segno fornisce



$$f\left(r\,\frac{1-2\sqrt{2}}{7}\right) = 5 + 2\sqrt{2} \qquad f\left(r\,\frac{1+2\sqrt{2}}{7}\right) = 5 - 2\sqrt{2}$$



Poiché deve essere

$$0 < x < r$$

la curva può assumere solo i valori corrispondenti al ramo tracciato continuo.