

42.

LUGLIO 1962

CONSIDERIAMO DUE CIRCONFERENZE COMPLANARI, TANGENTI INTERNAMENTE IN UN PUNTO  $S$  UNA DI CENTRO  $O$  E RAGGIO UNITARIO, L'ALTRA DI CENTRO  $O'$  E RAGGIO  $k$ . INDICHIAMO POI:

a) CON  $SM$  UNA CORDA DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO  $O$ , FORMANTE L'ANGOLO  $x$  CON LA  $SO$ , E CON  $SA$  E  $SA'$  LE CORDE DELLE DUE CIRCONFERENZE DI CENTRI  $O$  E  $O'$ , APPARTENENTI ALLA BISETTRICE DELL'ANGOLO  $OSM$ .

b) CON  $SQ$  LA CORDA DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO  $O'$ , PERPENDICOLARE A  $SM$ , E CON  $SB$ ,  $SB'$  LE CORDE DELLE DUE CIRCONFERENZE DI CENTRI  $O$  E  $O'$  APPARTENENTI ALLA PERPENDICOLARE AD  $SA$ .

SUCCESSIVAMENTE:

1) SI DETERMINI L'ANGOLO  $x$  IN MODO CHE RISULTI

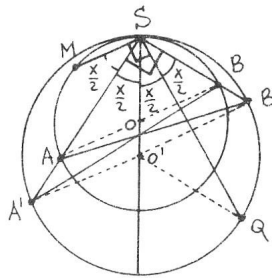
$$\frac{\overline{AB'}^2 - \overline{A'B}^2}{\overline{SQ}^2} = 2 - 3k^2$$

2) SI CALCOLI, NELL'IPOTESI DI  $k$  COSTANTE, IL MASSIMO DI  $\overline{SM} + \overline{SQ}$ .



3) (FACOLTATIVO) SI STUDI LA VARIAZIONE DELLA FUNZIONE

$$f(x) = \overline{SM}^2 + \overline{SQ}^2$$



$$\begin{aligned} OS &= 1 \\ O'S &= K \\ \widehat{QSM} &= 90^\circ \\ \widehat{ASB} &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{MSA} &= \widehat{ASO} = \\ &= \widehat{OSQ} = \widehat{QSB} = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Il triangolo OAS è isoscele con  $OS = OA = 1$   
e  
 $\widehat{AOS} = 180 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 180 - x$

Applichiamo il teorema di Carnot per trovare  $\overline{SA}^2$

$$\overline{SA}^2 = 1 + 1 - 2 \cos(180 - x) = 2 + 2 \cos x$$

Anche il triangolo O'A'S è isoscele con  $O'S = O'A' = K$   
e  
 $\widehat{A'O'S} = 180 - x$

Con Carnot si trova

$$\overline{SA'}^2 = K^2 + K^2 - 2 \cdot K \cdot K \cdot \cos(180 - x) = 2K^2 + 2K^2 \cos x$$

Anche il triangolo SOB è isoscele con  $OS = OB = 1$   
e poiché

$$\widehat{OSB} = 90 - x \rightarrow \widehat{SOB} = 180 - 2(90 - \frac{x}{2}) = x$$

quindi

$$\overline{SB}^2 = 1 + 1 - 2 \cos x = 2 - 2 \cos x$$

Infine anche il triangolo SO'B' è isoscele con  $O'S = O'B' = K$  e con  $\widehat{SO'B'} = x$ . Con Carnot si ha

$$\overline{SB'}^2 = K^2 + K^2 - 2 \cdot K \cdot K \cdot \cos x = 2K^2 - 2K^2 \cos x$$

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ASB' e A'SB si trova

$$\overline{AB'}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB'}^2 = \boxed{2 + 2 \cos x + 2K^2 - 2K^2 \cos x}$$

$$\overline{A'B}^2 = \overline{SA'}^2 + \overline{SB}^2 = \boxed{2 - 2 \cos x + 2K^2 + 2K^2 \cos x}$$

Calcoliamo ora  $\overline{SQ}^2$  osservando che anche il triangolo SO'Q è isoscele con  $SO' = O'Q = K$  e poiché

$$\widehat{QSO'} = 90 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 90 - x \rightarrow \widehat{SO'Q} = 180 - 2(90 - x) = 2x$$

quindi con Carnot si ha

$$\overline{SQ}^2 = K^2 + K^2 - 2 \cdot K \cdot K \cdot \cos 2x = \boxed{4K^2 - 4K^2 \cos^2 x}$$

Applicando la relazione del problema si ha



242

Luglio 1962

$$\frac{\overline{AB'}^2 - \overline{A'B}^2}{\overline{SQ}^2} = 2 - 3K^2$$

$$\frac{(1-K^2)\cos x}{K^2(1-\cos^2 x)} = 2 - 3K^2$$

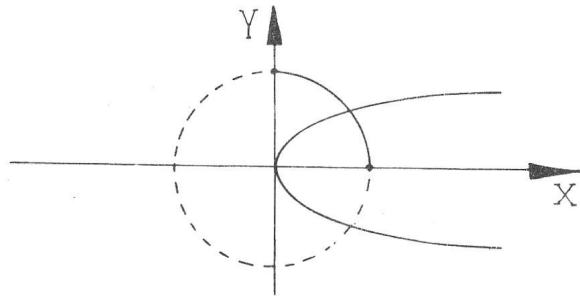
$$\boxed{\begin{aligned} (1-K^2)\cos x &= (2-3K^2)K^2 \sin^2 x \\ 0 &\leq x < 90 \end{aligned}} \quad (1)$$

Poniamo  $\begin{cases} \cos x = X \\ \sin x = Y \end{cases}$

e associamo alla (1) la relazione fondamentale della Trigonometria. Si ha il sistema

$$\begin{cases} X = \frac{(2-3K^2)K^2}{1-K^2} Y^2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè un fascio di parabole con asse orizzontale e vertice nell'origine, e una circonferenza di cui



Luglio 1962

243

dovremo considerare solo l'arco compreso nel primo quadrante -

C'è sempre una intersezione, e quindi una soluzione, purché la parabola abbia concavità rivolta verso destra, cioè deve essere

$$\frac{(2-3K^2)K^2}{1-K^2} > 0$$

Studiando il segno si ottiene una soluzione per

$$\boxed{\begin{aligned} 0 < K^2 < \frac{2}{3} \\ K^2 > 1 \end{aligned}}$$

e per

Passiamo al punto successivo e calcoliamo SM. Il triangolo SMO è isoscele con OS = OM = 1 e poiché  $\widehat{OSM} = x$  e  $\widehat{MOS} = 180 - 2x$ . Applicando Carnot si ha

$$\begin{aligned} SM &= \sqrt{1+1-2\cos(180-2x)} = \sqrt{2+2\cos 2x} = \\ &= \sqrt{2(1+\cos 2x)} = \sqrt{4\cos^2 x} = 2\cos x \end{aligned}$$

D'altronde è anche

$$SQ = \sqrt{4K^2 - 4K^2\cos^2 x} = \sqrt{4K^2(1-\cos^2 x)} = 2K\sin x$$

Consideriamo ora la funzione

$$y = \overline{SM} + \overline{SQ}$$

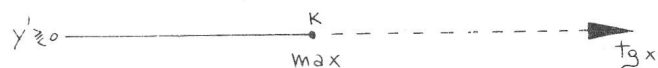


$$y = 2 \cos x + 2K \sin x \quad (2)$$

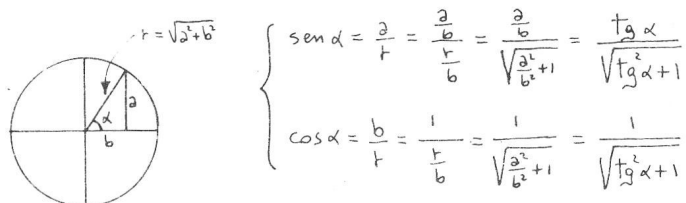
con  $K$  costante. Derivando si ha

$$y' = -2 \sin x + 2K \cos x \geq 0$$

$$-\tan x + K \geq 0$$



Valgono le seguenti formule trigonometriche:



Sostituendole nella (2) si ha

$$y = \frac{2}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} + \frac{2K \tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} \quad \text{e, ponendo } \tan x = K,$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{K^2 + 1}} + \frac{2K^2}{\sqrt{K^2 + 1}} \rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{K^2 + 1}}$$

che è il valore massimo che può assumere la (2).

Passiamo infine alla parte facoltativa. Essendo

$$\overline{SM}^2 = 4 \cos^2 x \quad \overline{SQ}^2 = 4K^2 \sin^2 x$$

si ha

$$y = \overline{SM}^2 + \overline{SQ}^2$$

$$\boxed{y = 4 \cos^2 x + 4K^2 \sin^2 x}$$

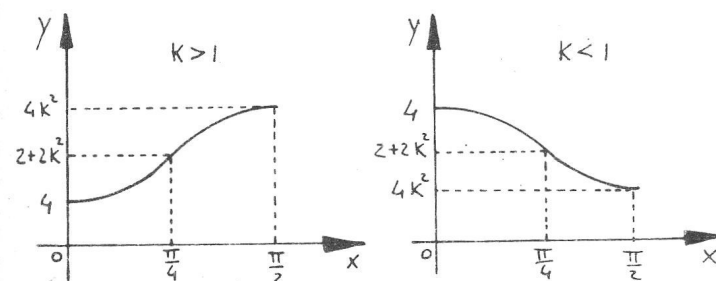
$$0 < x < 90$$

funzione con  $K$  costante ed equivalente a  $\overline{MQ}^2$ .

Si ottengono due curve diverse a seconda che  $K \geq 1$ .

$$y' = \sin x \cos x (8K^2 - 8)$$

$$y'' = (\cos^2 x - \sin^2 x)(8K^2 - 8)$$



Se  $K=1$  la funzione degenera nella retta

$$y=4$$