43.

SETTEMBRE 1962

SIA DATO IL TRIANGOLO ABC, I CUI LATI HANNO LE MISURE AB = 13, BC = 14, CA = 15 E SI CONSIDERI LA CIRCONFERENZA ISCRITTA IN ESSO.

DETERMINARE UNA PARALLELA r AL LATO BC IN MODO CHE, DETTE MN E PQ LE CORDE CHE SU r STACCANO RISPETTIVAMENTE IL TRIANGOLO E LA CIRCONFERENZA, SI ABBIA:

$$\overline{PQ} + \frac{6}{7}\,\overline{MN} = s$$

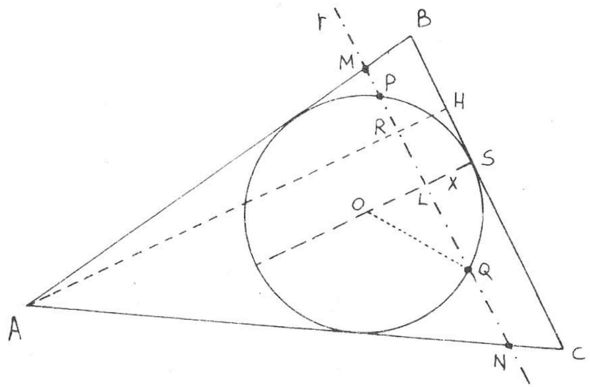
ESSENDO S UN NUMERO POSITIVO ASSEGNATO.

FACOLTATIVAMENTE, SI DISTINGUANO I CASI IN CUI S RISULTA MAGGIORE O MINORE DELLA MISURA DELL'ALTEZZA AH RELATIVA AL LATO BC.

N.B. SI CONSIGLIA DI ASSUMERE COME INCOGNITA LA DISTANZA FRA LE RETTE r E BC.

Il triangolo ABC non è rettangolo perchè

$$13^2 + 14^2 \neq 15^2$$



Applichiamo la formula di Erone per calcolare l'area del triangolo ABC. Il semiperimetro è $p=21$, perciò

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\sqrt{7056}=84$$

Il doppio dell'area diviso la base BC, dà l'altezza AH

$$AH=\frac{2\cdot 84}{14}=12$$

Ora poniamo

$$LS=x \qquad (\text{con } 0\le x\le 2r)$$

Si ha

$$OL=r-x$$

$$LQ=\sqrt{r^2-(r-x)^2}=\sqrt{2rx-x^2}$$

$$\boxed{PQ=2\sqrt{2rx-x^2}}$$

Inoltre il triangolo ABC è simile al triangolo AMN e perciò

$$BC:AH=MN:AR$$

$$MN=\frac{BC\cdot AR}{AH}=\frac{14\cdot(12-x)}{12}$$

$$\boxed{MN=\frac{7(12-x)}{6}}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$\overline{PQ}+\frac{6}{7}\,\overline{MN}=s$$

$$\boxed{\begin{array}{c}2\sqrt{2rx-x^2}=s-12+x\\ 0\le x\le 2r\end{array}} \quad (1)$$

Poiché la presenza del coefficiente letterale r risulta scomoda nella discussione, determiniamo il suo valore numerico ricordando che il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è

$$r=(p-a)\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

ma una delle formule di Briggs asserisce che

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

e perciò

$$r = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

cioè

$$r = \sqrt{\frac{6\cdot 7\cdot 8}{21}} = 4$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\sqrt{8x-x^2} = s-12+x \\ 0\le x\le 8 \end{array}} \quad (2)$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$y = \sqrt{8x-x^2}$$

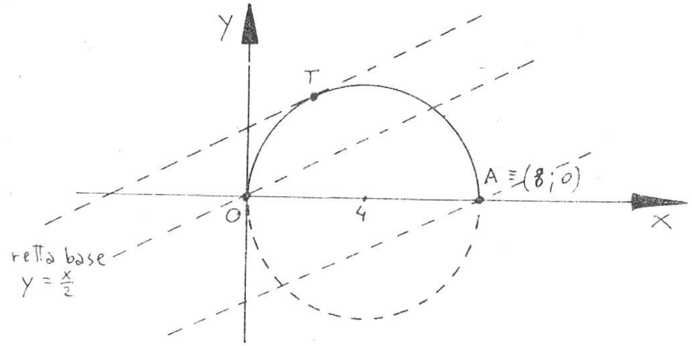
Si ha il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x=0 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{s}{2}-6 \end{cases}$$

con $0\le x\le 8$, $y\ge 0$

cioè una semicirconferenza con centro nel punto $(4;0)$ e raggio 4, e un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $\frac{1}{2}$.

Il grafico che si ottiene è il seguente



Imponiamo il passaggio del fascio di rette per i punti O, A, T

O $\longrightarrow$ $\frac{s}{2}-6=0$ $\longrightarrow$ $s=12$

A $\longrightarrow$ $0=\frac{8}{2}+\frac{s}{2}-6$ $\longrightarrow$ $s=4$

T $\longrightarrow$ $\frac{\Delta}{4}=(28-s)^2-5(s^2-24s+144)=0$ $\longrightarrow$ $s=8\pm4\sqrt{5}$

Dove si ha la tangenza in T con il segno più.

Quindi, riassumendo