44.

LUGLIO 1963

TAGLIARE UNA SFERA DI RAGGIO r CON UN PIANO IN MANIERA CHE LA SOMMA DELLE AREE DELLA MAGGIORE DELLE DUE CALOTTE COSÌ OTTENUTE E DELLA SUPERFICIE LATERALE DEL CONO TANGENTE ALLA SFERA E AVENTE PER BASE IL CERCHIO SEZIONE, STIA NEL RAPPORTO K CON L'AREA DELLA SEZIONE.

DISCUSSIONE.

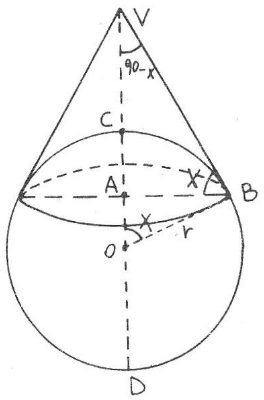
SUCCESSIVAMENTE SI STUDI LA VARIAZIONE DEL PREDETTO RAPPORTO K IN FUNZIONE DELLA DISTANZA DEL PIANO SECANTE DAL CENTRO E, DISEGNATO IL GRAFICO RELATIVO, SI TROVINO I RISULTATI OTTENUTI CON LA DISCUSSIONE PRECEDENTE.

Poniamo

$$A\hat{O}B = x \qquad \text{con} \qquad 0 \leq x < \pi/2$$

Nel triangolo AOB si ha

$$AB = r\,\text{sen}\,x \qquad AO = r\cos x \qquad AD = r + r\cos x$$



Nel Triangolo VOB è invece

$$VB = r\,tg\,x$$

Ricordando che

$$\begin{cases} S_{calotta} = 2\pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{AD} \\ S_{lat.\,cono} = \pi \cdot \overline{AB} \cdot \overline{VB} \end{cases}$$

applicando la relazione del problema si ha

$$\frac{S_{calotta} + S_{lat.\,cono}}{\pi \cdot \overline{AB}^2} = K \qquad (\text{con } K > 0)$$

$$\frac{2\pi r(r + r\cos x) + \pi r \,\mathrm{sen}\, x \cdot r\,tg\,x}{\pi r^2 \,\mathrm{sen}^2 x} = K$$

cioè

$$K\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x(2-K) + 1 = 0$$

dividendo con Ruffini si ha

$$(\cos x + 1)\left[K\cos^2 x + (1-K)\cos x + 1\right] = 0$$

Il fattore $(\cos x + 1)$ può essere tralasciato perchè risulta sempre $\cos x \neq -1$ $(x \neq \pi)$.
Si ha dunque l'equazione parametrica

$$\boxed{\begin{array}{l} K\cos^2 x + (1-K)\cos x + 1 = 0 \\ 0 < \cos x \leq 1 \qquad K > 0 \end{array}}$$

Poniamo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ X^2 = Y \end{cases}$$

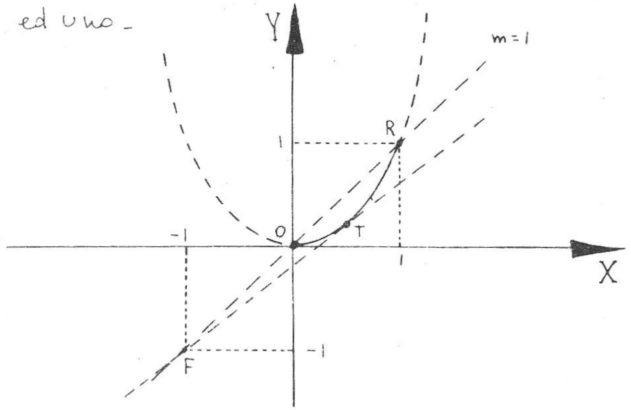
si ha il sistema

$$\begin{cases} Y = \dfrac{K-1}{K} X - \dfrac{1}{K} \\ Y = X^2 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette con centro nel punto $F \equiv (-1; -1)$ e coefficiente angolare

$$m = \frac{K-1}{K}$$

e una parabola con asse verticale, concavità verso l'alto, vertice nell'origine e ascisse comprese fra zero ed uno.



La retta del fascio passa per O e per R quando

$$m = \frac{k-1}{k} = \operatorname{tg} 45° = 1 \longrightarrow 1 - \frac{1}{k} = 1 \longrightarrow k = \infty$$

Passa invece per T quando

$$\Delta = (1-k)^2 - 4k = 0 \longrightarrow k = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

La soluzione $3-2\sqrt{2}$ va scartata perchè rende $m = -2-2\sqrt{2}$, cioè negativo. Quindi si hanno due soluzioni per

$$\boxed{k \geq 3 + 2\sqrt{2}}$$

Poniamo ora $r\cos x = h$ nella espressione

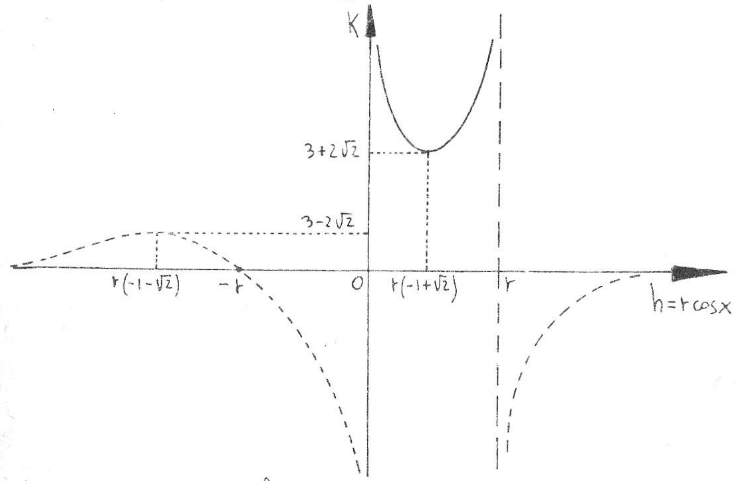
$$\frac{2r(r + r\cos x) + r^2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{r^2 \operatorname{sen}^2 x} = k$$

si ottiene

$$k = \frac{rh^2 + 2r^2h + r^3}{r^2h - h^3}$$

$$k = \frac{r(r+h)^2}{h(r^2-h^2)} \longrightarrow \boxed{k = \frac{r(r+h)}{h(r-h)}}$$

che corrisponde alla seguente funzione



La curva ha significato geometrico solo per $0 < h \leq r$ ed h può assumere due valori per $k \geq 3 + 2\sqrt{2}$ come già visto nella discussione precedente.