45

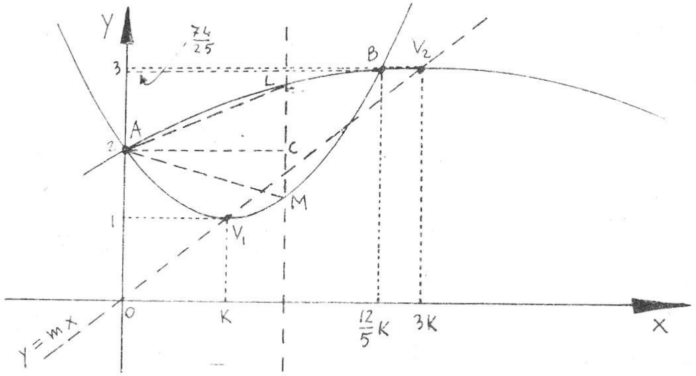
SETTEMBRE 1963

IN UN PIANO RIFERITO AD UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI xOy, SONO DATE DUE PARABOLE CON GLI ASSI PERPENDICOLARI ALL'ASSE x, I CUI VERTICI SIANO ALLINEATI CON L'ORIGINE O E ABBIANO LE ORDINATE RISPETTIVAMENTE 1 E 3 - SI SA INOLTRE CHE LE DUE CURVE HANNO IN COMUNE IL PUNTO $A \equiv (0;2)$-

ASSUNTO COME PARAMETRO K L'ASCISSA DEL VERTICE DI ORDINATA MINORE, SI SCRIVANO LE EQUAZIONI DELLE DUE CURVE E SI ESPRIMANO PER MEZZO DI K LE COORDINATE DEL LORO SECONDO PUNTO D'INCONTRO, INDI SI DETERMINI L'AREA DELLA REGIONE LIMITATA DALLE DUE CURVE - INFINE SI TROVINO, TRA LE CORDE DELLA REGIONE CONSIDERATA, CHE SIANO PARALLELE ALL'ASSE y:

a) QUELLA DI LUNGHEZZA MASSIMA-

b) QUELLA CHE CON IL PUNTO A INDIVIDUA IL TRIANGOLO DI AREA MASSIMA-



L'equazione generica delle due parabole è

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponiamo il passaggio per $A \equiv (0; 2)$, si ottiene $c = 2$ e perciò rimane

$$y = ax^2 + bx + 2$$

Indicando con K l'ascissa del vertice di ordinata minore, esso avrà coordinate

$$V_1 \equiv (K; 1)$$

Imponendo alla $y = mx$ di passare per V_1 si ricava

$$1 = mK \longrightarrow m = \frac{1}{K}$$

Quindi la seconda parabola ha vertice V_2 che

si trova sulla retta $y = \frac{1}{K}x$, ed ha ordinata 3.
Le sue coordinate sono dunque

$$V_2 \equiv (3K; 3)$$

Imponiamo infine all'equazione generica di avere vertice nei punti V_1 e V_2. Si ha

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = K \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 3K \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 2Ka \\ -b^2 + 8a = 4a \end{cases} \qquad \begin{cases} -b = 6Ka \\ -b^2 + 8a = 12a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{K^2} \\ b = -\dfrac{2}{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{9K^2} \\ b = \dfrac{2}{3K} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{K^2}x^2 - \frac{2}{K}x + 2} \qquad \boxed{y = -\frac{1}{9K^2}x^2 + \frac{2}{3K}x + 2}$$

Indicando con B il secondo punto d'incontro delle due parabole, si trova

$$\boxed{B \equiv \left(\frac{12}{5}K; \frac{74}{25}\right)}$$

La superficie della regione colorata è data dall'integrale definito

$$S = \int_0^{\frac{12}{5}k} \left[\left(-\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2\right) - \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2\right)\right] dx = \frac{64}{25} k$$

Consideriamo ora due generici punti L ed M delle parabole, aventi la stessa ascissa x.
Le loro coordinate sono

$$\begin{cases} L \equiv \left(x; -\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2\right) \\ M \equiv \left(x; \frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2\right) \end{cases}$$

e perciò la generica corda LM parallela all'asse y, ha lunghezza

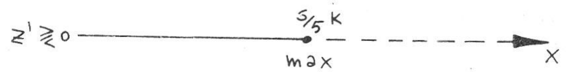
$$\overline{LM} = -\frac{x^2}{9k^2} + \frac{2x}{3k} + 2 - \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k} + 2\right) = \frac{-10x^2 + 24kx}{9k^2}$$

Indicando con z tale funzione, si ha

$$z = -\frac{10}{9k^2}x^2 + \frac{24}{9k}x$$

e derivando

$$z' = -\frac{20}{9k^2}x + \frac{24}{9k}$$



La corda $\overline{LM}$ ha dunque lunghezza massima per $x = \frac{6}{5}k$.
Consideriamo infine il triangolo ALM.
La sua superficie generica è

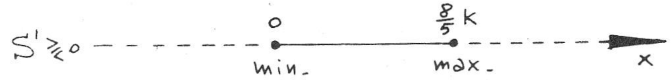
$$S = \frac{\overline{LM} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{-10x^2 + 24kx}{9k^2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = -\frac{5x^3}{9k^2} + \frac{4x^2}{3k}$$

Derivando si ha

$$S' = -\frac{5x^2}{3k^2} + \frac{8x}{3k}$$

e, studiando il segno,



Quindi il triangolo ALM ha area massima per $x = \frac{8}{5}k$.