1.

LUGLIO 1964

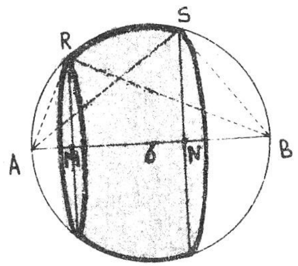
INTERNAMENTE AL DIAMETRO AB DI UNA SFERA DI RAGGIO r SI DETERMININO I PUNTI M ED N IN MODO CHE SIA

$$\overline{NB} = r - 2\,\overline{AM}$$

E CHE IL RAPPORTO FRA L'AREA DELLA ZONA SFERICA COMPRESA FRA I DUE PIANI PERPENDICOLARI AL DIAMETRO AB NEI PUNTI M ED N E LA SOMMA DELLE AREE DEI CERCHI D'INTERSEZIONE DEI DETTI PIANI CON LA SFERA SIA UGUALE AD UN NUMERO K ASSEGNATO.

DISCUSSIONE.

DIRE PER QUALE POSIZIONE DI M LA SOMMA DEI VOLUMI DEI DUE CONI DI VERTICE IL CENTRO DELLA SFERA E DI BASI I CERCHI GIÀ CONSIDERATI RISULTI MASSIMA



Poniamo $\overline{AM} = x$

ne risulta che

$$\overline{NB} = r - 2x$$
$$\overline{MB} = 2r - x$$
$$\overline{AN} = 2x + r$$
$$\overline{MN} = r + x$$

Calcoliamo $\overline{MR}^2$ e $\overline{NS}^2$ applicando il secondo teorema di Euclide ai due triangoli rettangoli ARB e ASB.

$$\overline{RM}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MB} = x(2r - x)$$

$$\overline{NS}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{NB} = (2x + r)(r - 2x) = r^2 - 4x^2$$

La superficie della zona sferica è

$$S_1 = 2\pi \cdot \overline{AO} \cdot \overline{MN} = 2\pi r(r + x)$$

la superficie del cerchio passante per M è

$$S_2 = \pi \cdot \overline{MR}^2 = \pi x(2r - x)$$

e quella del cerchio passante per N è

$$S_3 = \pi \cdot \overline{NS}^2 = \pi(r^2 - 4x^2)$$

applichiamo ora la relazione fornita dal problema

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = K$$

cioè

$$\frac{2\pi r^2 + 2\pi r x}{2\pi r x - \pi x^2 + \pi r^2 - 4\pi x^2} = K$$

dividiamo per π e eliminiamo il denominatore

$$2r^2 + 2rx = 2rKx - Kx^2 + Kr^2 - 4Kx^2$$

semplificando si ottiene

$$\boxed{5Kx^2 - 2rx(K-1) + 2r^2 - Kr^2 = 0}$$

che è l'equazione da discutere. Circa le limitazioni dell'incognita è

$$0 \leq x \leq \frac{r}{2}$$

infatti il valore massimo della x si ha quando NB = 0, ed in tal caso avviene che

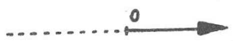
$$r - 2x = 0 \longrightarrow x = \frac{r}{2}$$

Inoltre, essendo K il rapporto fra due superfici, deve sempre essere

$$K > 0$$

Discutiamo il problema con il metodo di Tartinville.

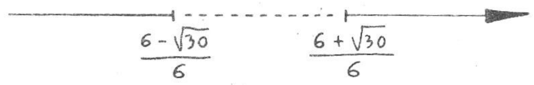
$A \geq 0$ $\quad 5K \geq 0 \longrightarrow K \geq 0$



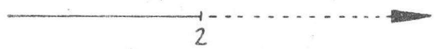
$\frac{\Delta}{4} \geq 0$

$$r^2(K^2 - 2K + 1) - 5K(2r^2 - Kr^2) \geq 0$$

$$6K^2 - 12K + 1 \geq 0$$



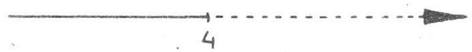
$f(0) \geq 0$ $\quad 2r^2 - Kr^2 \geq 0 \longrightarrow K \leq 2$



$f\left(\frac{r}{2}\right) \geq 0$

$$\frac{5Kr^2}{4} - r^2(K-1) + 2r^2 - Kr^2 \geq 0$$

$$K \leq 4$$

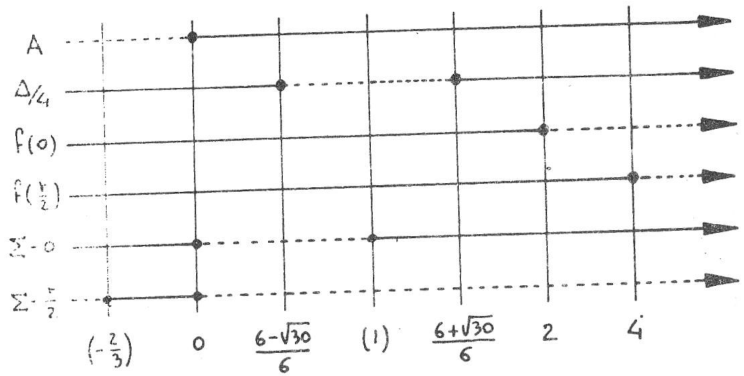


$\Sigma - 0 \geq 0$

$$\Sigma = -\frac{b}{2a} = \frac{r(K-1)}{5K}$$

$\Sigma - \frac{r}{2} \geq 0$ $\qquad \frac{r(K-1)}{5K} - \frac{r}{2} \geq 0 \qquad \frac{-3K-2}{10K} \geq 0$

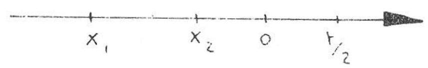
Raccogliendo tutti i risultati in un unico quadro riassuntivo si ottiene



Analizziamo ora cosa avviene quando K assume dei valori compresi in tali intervalli.
Occorre ricordare che per ragionamenti di carattere geometrico deve essere $K > 0$ e perciò non consideriamo i valori di $K \leq 0$

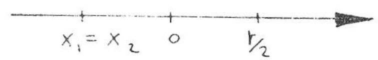
Se $\quad 0 < K < \frac{6-\sqrt{30}}{6}$

si ha



e quindi le due soluzioni non sono accettabili.
Se invece

$K = \frac{6-\sqrt{30}}{6}$ si ha

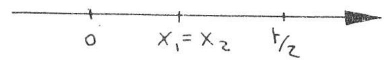


cioè due soluzioni coincidenti ma non accettabili.
Se

$\frac{6-\sqrt{30}}{6} < K \; \frac{6+\sqrt{30}}{6}$ si hanno due soluzioni complesse coniugate.

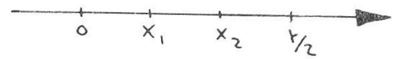
Se

$K = \frac{6+\sqrt{30}}{6}$ si ha



cioè due soluzioni coincidenti accettabili.
Se

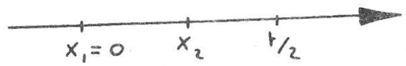
$\frac{6+\sqrt{30}}{6} < K < 2$ si ha



cioè due soluzioni distinte entrambe accettabili.

Se

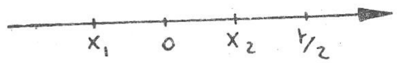
$K = 2$ si ha



cioè la soluzione minore è una soluzione limite mentre l'altra è normale e accettabile.

Se

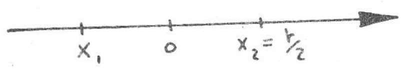
$2 < K < 4$ si ha



cioè si hanno due soluzioni di cui solo la maggiore è accettabile.

Se

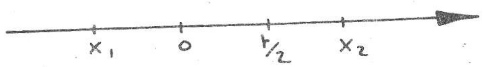
$K = 4$ si ha



cioè due soluzioni di cui la minore non accettabile e la maggiore soluzione limite.

Se infine

$K > 4$



cioè nessuna soluzione accettabile.

Concludendo si hanno due soluzioni per

$$\frac{6+\sqrt{30}}{6} \leq K \leq 2$$

ed una soluzione per

$$2 < K \leq 4$$

Occupiamoci ora della seconda parte del problema. Dalla figura all'inizio dell'esercizio si ricava

$$\overline{MO} = r - x$$

$$\overline{NO} = r - \overline{NB} = 2x$$

Il volume dei due coni di cui si fa riferimento nel testo, è

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \overline{MR}^2 \cdot \overline{MO}}{3} = \frac{\pi x (2r - x)(r - x)}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \overline{NS}^2 \cdot \overline{NO}}{3} = \frac{\pi (r^2 - 4x^2) 2x}{3}$$

La funzione di cui dobbiamo calcolare il massimo è

$$y = V_1 + V_2$$

cioè

$$y = \frac{\pi}{3}\left[(2rx - x^2)(r - x) + 2r^2 x - 8x^3\right]$$

da cui, semplificando,

$$y = \frac{\pi}{3}\left(-7x^3 - 3rx^2 + 4r^2x\right)$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno

$$y' = \frac{\pi}{3}\left(-21x^2 - 6rx + 4r^2\right)$$

$f'(x) \geq 0$

$-$		$+$		$-$
	$\dfrac{-3r - r\sqrt{91}}{21}$		$\dfrac{-3r + r\sqrt{91}}{21}$	
	min		max	

Quindi si ha il massimo cercato quando

$$x = r\,\frac{\sqrt{91} - 3}{21}$$