

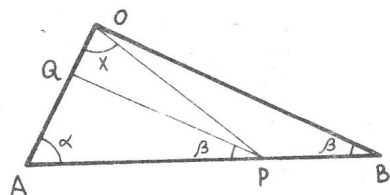
2.

SETTEMBRE 1964

E' DATO UN TRIANGOLO AOB, RETTANGO-
LO IN O, NEL QUALE IL CATETO MINORE
 \overline{OA} E' LUNGO a E L'ALTRO E' LUNGO $\frac{a}{m}$
DETERMINARE SULL'IPOTENUSA UN PUN-
TO P IN MODO CHE, DETTA Q LA SUA PRO-
IEZIONE ORTOGONALE SU \overline{OA} , SI ABBIA

$$\overline{OP} + \overline{PQ} = K a$$

ESSENDO K UN NUMERO POSITIVO DATO
SI DISCUTA IL PROBLEMA RISPETTO AL
PARAMETRO K .
(FACOLTATIVAMENTE) - IL CANDIDATO
PUO' ANCHE ESAMINARE IL CASO DI $m > 1$
SOTTO LA QUALE IPOTESI \overline{OA} NON RI-
SULTA PIU' IL CATETO MINORE.



$$\overline{OA} = a$$

$$\overline{OB} = \frac{a}{m}$$

Poiché per ragioni geometriche deve essere $m > 0$ e contemporaneamente (lo precisa il testo) $\overline{OA} < \overline{OB}$, vale per m la limitazione

$$0 < m < 1$$

Risolviamo il problema per via trigonometrica, e quindi poniamo

$$\widehat{AOP} = x$$

Nel triangolo OQP è

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \operatorname{tg} x \quad \longrightarrow \quad \overline{QP} = \overline{OQ} \cdot \operatorname{tg} x \quad (*)$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \cos x \quad \longrightarrow \quad \overline{OP} = \frac{\overline{OQ}}{\cos x} \quad (**)$$

Inoltre, poiché i triangoli AOB e AQP sono

simili, vale la proporzione

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{QA} : \overline{QP}$$

da cui si ottiene

$$\overline{QA} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{QP}}{\overline{OB}} = \frac{a \cdot \overline{QP}}{\frac{a}{m}} = m \cdot \overline{QP}$$

è dunque

$$\overline{OQ} = \overline{OA} - \overline{QA} = a - m \cdot \overline{QP}$$

e sostituendo \overline{QP} con la (*), si ha

$$\overline{OQ} = a - m \cdot \overline{OQ} \cdot \operatorname{tg} x$$

cioè

$$\overline{OQ} = \frac{a}{1 + m \operatorname{tg} x}$$

Sostituendo infine questa espressione nelle (*) e (**), si ricava

$$\begin{cases} \overline{QP} = \frac{a \cdot \operatorname{tg} x}{1 + m \operatorname{tg} x} \\ \overline{OP} = \frac{a}{\cos x (1 + m \operatorname{tg} x)} \end{cases}$$

Applichiamo la relazione fornita dal problema

$$\overline{OP} + \overline{PQ} = Ka$$

$$\frac{a}{\cos x \cdot (1 + m \cdot \operatorname{tg} x)} + \frac{a \cdot \operatorname{tg} x}{1 + m \cdot \operatorname{tg} x} = Ka$$

Semplificando si ottiene

$$\boxed{\operatorname{sen} x (1 - mK) - K \cos x + 1 = 0}$$

cioè un'equazione lineare in seno e coseno con le seguenti limitazioni

$$0 \leq x \leq 90$$

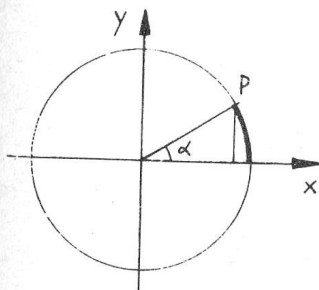
$$K > 0$$

$$0 < m < 1$$

Eseguiamo la discussione grafica: consideriamo il sistema formato dalla equazione risultante prima ottenuta e dalla prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x (1 - mK) - K \cos x + 1 = 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Ricordando la definizione di seno e coseno essi sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa dell'estremo di un arco. Cioè



$$P \equiv (\cos \alpha; \operatorname{sen} \alpha)$$

Quindi ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(1 - mK) - KX + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè un fascio di rette e una circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine.

Le soluzioni del problema sono costituite dalle intersezioni fra la retta generica del fascio

e la circonferenza -

Elaboriamo l'equazione del fascio in modo da stabilire quali siano le coordinate del centro dello stesso -

$$Y = \frac{KX}{1-mK} - \frac{1}{1-mK}$$

$$Y = \frac{KX}{1-mK} - \frac{1-mK+mK}{1-mK}$$

$$Y = \frac{KX}{1-mK} - 1 - \frac{mK}{1-mK}$$

$$Y+1 = \frac{K}{1-mK} (X-m)$$

Quindi il centro del fascio ha coordinate

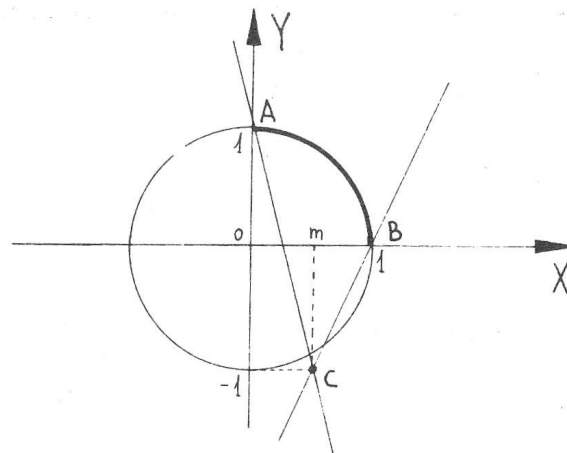
$$C \equiv (m; -1)$$

Circa la circonferenza, poiché l'angolo x è sottoposto alla limitazione

$$0 \leq x \leq 90$$

prenderemo in considerazione solo l'arco compreso nel primo quadrante e segnato con tratto

più pesante nel grafico seguente



Imponiamo al fascio di rette il passaggio per i punti A e B -

$$A \equiv (0; 1) \quad \longrightarrow \quad K = \frac{2}{m}$$

$$B \equiv (1; 0) \quad \longrightarrow \quad K = 1$$

Il problema ammette quindi una sola soluzione accettabile per

$$1 \leq K \leq \frac{2}{m}$$

Osservando il triangolo AOB si può notare che

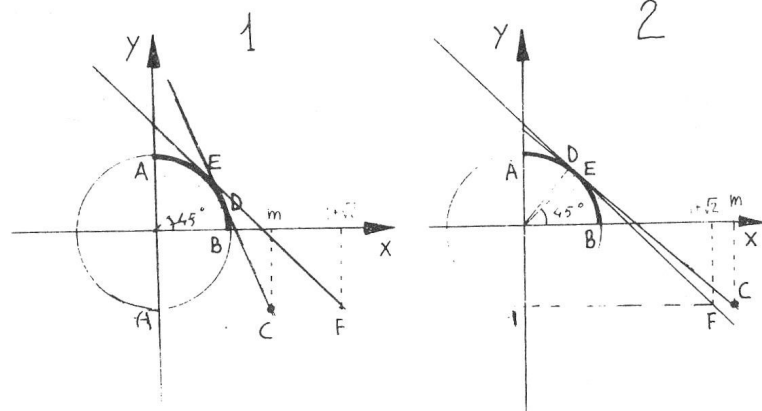
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = a \cdot \frac{m}{a} = m$$

e quindi la limitazione

$$0 < m < 1$$

significa geometricamente che l'angolo β è compreso fra 0° e 45° .

Supponiamo ora $m > 1$ cioè $\beta > 45^\circ$. Possiamo distinguere due casi diversi:



cioè il caso in cui il punto di tangenza D fra circonferenza e retta è al di sotto di E e il caso

in cui D è al di sopra di E.

Poiché l'arco correlato con il punto E è di 45° , le coordinate di E sono

$$E \equiv (\cos 45^\circ; \sin 45^\circ) \longrightarrow E \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La retta passante per E e tangente alla circonferenza ha coefficiente angolare

$$m = -1$$

e quindi equazione

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow x + y = \sqrt{2}$$

ponendo $y = -1$ si ottiene l'ascissa del punto F

$$F \equiv (1 + \sqrt{2}; -1)$$

Perciò facendo riferimento ai due grafici della pagina precedente si avrà il caso 1 o il caso 2 a seconda che

$$m \lesseqgtr 1 + \sqrt{2}$$

In entrambi i casi il punto di tangenza
D fra retta passante per C e circonferenza
si verifica quando

$$\begin{cases} X = \frac{1+Y-mKY}{K} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$Y^2(1+m^2K^2-2mK+K^2) - 2Y(mK-1) + 1-K^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \longrightarrow \quad K = \frac{2m}{1+m^2}$$

Quindi possiamo concludere affermando
che:

quando

$$1 < m < 1+\sqrt{2}$$

$$\text{si ha } \begin{cases} 2 \text{ soluzioni accettabili per} \\ \frac{2m}{1+m^2} \leq K \leq 1 \\ 1 \text{ soluzione accettabile per} \\ 1 < K \leq \frac{2}{m} \end{cases}$$

mentre invece quando

$$m > 1+\sqrt{2}$$

$$\text{si ha } \begin{cases} 2 \text{ soluzioni accettabili per} \\ \frac{2m}{1+m^2} \leq K \leq \frac{2}{m} \\ 1 \text{ soluzione accettabile per} \\ \frac{2}{m} < K \leq 1 \end{cases}$$