

LUGLIO 1965

NEL TRIANGOLO ABC , LA PROIEZIONE HC DEL LATO AC SULLA RETTA BC È TRIPLA DELLA PROIEZIONE HB DEL LATO AB SULLA STESSA RETTA BC .

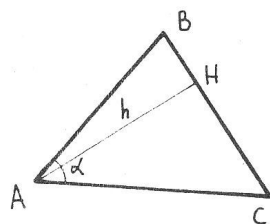
POSTO $AH = h$, $BC = x$, $\tan \hat{BAC} = y$,

- 1) SI TROVI LA RELAZIONE CHE SUSSISTE FRA x E y CONSIDERANDO SEPARATAMENTE I CASI IN CUI H RISULTI ESTERNO O INTERNO AL SEGMENTO BC ;
- 2) NEL CASO IN CUI H SIA ESTERNO AL SEGMENTO BC , SI RAPPRESENTI GRAFICAMENTE LA FUNZIONE $y(x)$ DEDOTTA DALLA RELAZIONE PRECEDENTE E SE NE STUDI L'ANDAMENTO;
- 3) SI RISOLVANO GRAFICAMENTE I PROBLEMI DI COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO ABC DATI DUE DEI TRE ELEMENTI BC , AH , \hat{BAC} .

FACOLTATIVAMENTE:

- 4) NEL CASO DI H ESTERNO AL SEGMENTO BC , SUPPOSTO $h = \frac{1}{2}$, SI CALCOLI L'AREA DELLA SUPERFICIE COMPRESA FRA LA CURVA E LA SUA CORDA PASSANTE PER

- PUNTI DI ASCISSA $x=0$ E $x=\sqrt{3}/3$;
 5) NEL CASO DI H INTERNO AL SEGMENTO BC, SUPPOSTO $h=1/4$, SI RAPPRESENTI GRAFICAMENTE LA FUNZIONE $y(x)$ DEDOTTA DALLA RELAZIONE DI CUI AL NUMERO 1) -



$$\overline{HC} = 3 \cdot \overline{HB}$$

$$\overline{AH} = h$$

$$\overline{BC} = x$$

$$\tan \alpha = y$$

Supponiamo dapprima che il punto H sia interno al segmento BC.
 Risultato

$$\overline{BH} = \frac{x}{4}$$

$$\overline{HC} = \frac{3}{4}x$$

Calcoliamo AB e AC con il T. di Pitagora

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\frac{x^2}{16} + h^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{16} + h^2}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo ABC

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \quad (*)$$

o anche, ricordando che $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$

$$x^2 = \frac{x^2}{16} + h^2 + \frac{9x^2}{16} + h^2 - 2 \frac{\sqrt{\frac{x^2}{16} + h^2} \cdot \sqrt{\frac{9x^2}{16} + h^2}}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$$

ponendo $\tan \alpha = y$ e semplificando, si ha

$$- \sqrt{\frac{9x^4 + 160h^2x^2 + 256h^4}{1+y^2}} = -3x^2 + 16h^2$$

e quadrando ambo i membri e semplificando

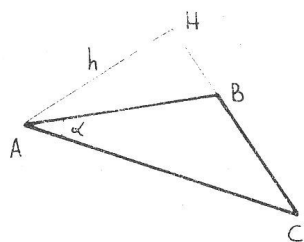
$$y^2 = \frac{256h^2x^2}{(3x^2 - 16h^2)^2}$$

da cui

$$y = \pm \frac{16hx}{3x^2 - 16h^2} \quad \text{o anche} \quad y = \frac{16hx}{|3x^2 - 16h^2|}$$

che è la relazione cercata.

Supponendo invece che il punto H si trovi sul prolungamento esterno del lato BC, avremo



$$\overline{BC} = x$$

$$\overline{HC} = 3 \cdot \overline{HB}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{HC} - \overline{HB} = 3 \cdot \overline{HB} - \overline{HB} = \\ &= 2 \cdot \overline{HB}\end{aligned}$$

$$\text{quindi } \begin{cases} \overline{HB} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{x}{2} \\ \overline{HC} = \frac{3}{2} x \end{cases}$$

analogamente al caso precedente si ha

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + h^2}$$

e riapplicando la (*) si ottiene

$$x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 + \frac{9}{4}x^2 + h^2 - 2 \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2} \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + h^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

da cui facendo i calcoli si ricava

$$y = \frac{4hx}{3x^2 + 4h^2}$$

che è la seconda relazione cercata. Si ricordi che per ragioni geometriche deve sempre essere

$$h > 0$$

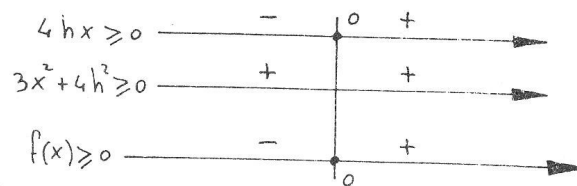
Studiamo l'andamento di quest'ultima funzione. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

la curva ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0$. Non vi sono asintoti verticali o obliqui.

La curva attraversa gli assi cartesiani solo nell'origine.

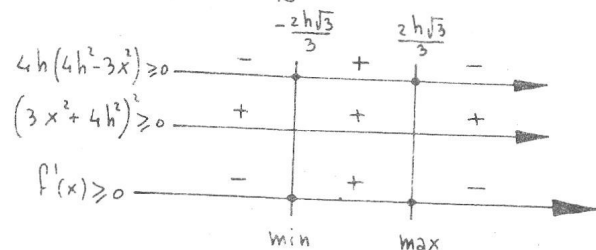
Studiamo il segno di $f(x)$



Troviamo la derivata prima

$$y' = \frac{4h(4h^2 - 3x^2)}{(3x^2 + 4h^2)^2}$$

e studiamone il segno



Le ordinate corrispondenti a questi due punti caratteristici sono

$$f\left(-\frac{2h\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

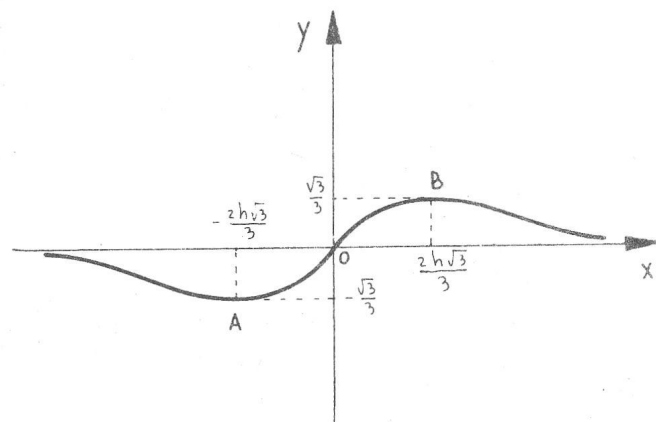
$$f\left(\frac{2h\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nella pagina seguente è riportato il grafico concluso. Si noti come la curva sia simmetrica rispetto all'origine in quanto è

$$f(x) = -f(-x)$$

La curva ha significato geometrico solo

quando x , y e h sono positivi.

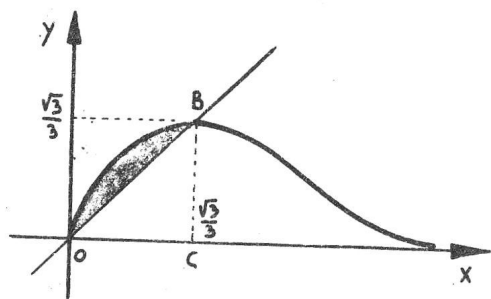


Per valori di h sempre più grandi l'asse delle ordinate rimane invariato mentre quello delle ascisse subisce una dilatazione sia sia maggiore. Mantenendo costante h , la determinazione dei valori x e y necessari per costruire il triangolo corrispondono alla scelta di un punto qualsiasi della curva nel primo quadrante.

Passiamo alla parte facoltativa ponendo nella funzione $h = \frac{1}{2}$. Il punto B viene ad assumere coordinate $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e la curva

assume la forma

$$y = \frac{2x}{3x^2 + 1}$$



L'area del triangolo OBC è

$$S_{OBC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

L'area del triangoloide è

$$S = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x}{3x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{6x}{3x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\log(3x^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{1}{3} (\log 4 - \log 1) = \frac{\log 4}{3}$$

e quindi la superficie della regione più scura è

$$S = \frac{\log 4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2 \log 4 - 1}{6}$$

Occupiamoci infine del grafico relativo alla funzione

$$y = \frac{16hx}{|3x^2 - 16h^2|}$$

ottenuta nel caso in cui il punto H è interno al segmento BC, nel caso particolare in cui sia $h = 1/4$.

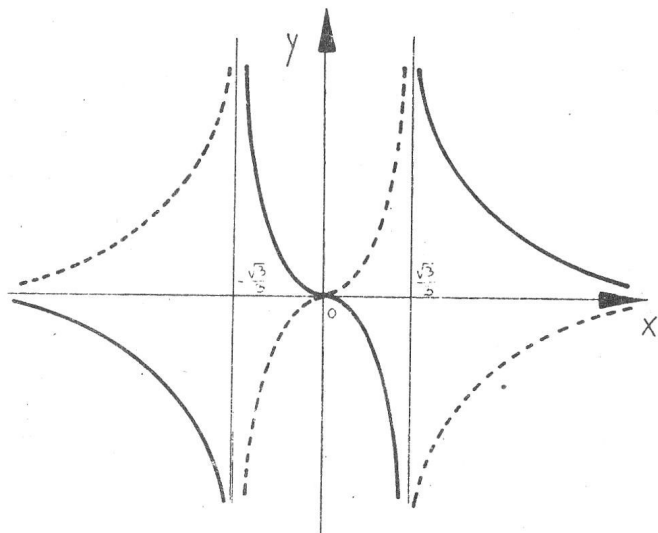
Si ottengono le due funzioni

$$y = \frac{4x}{3x^2 - 1} \quad \text{e} \quad y = \frac{4x}{1 - 3x^2}$$

che sono simmetriche rispetto all'origine in quanto è

$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

e perciò è sufficiente studiare la prima per poter ottenere poi graficamente anche la seconda.



Dai calcoli si ottengono le due curve del grafico (quella a tratto pieno si riferisce alla prima equazione, mentre quella tratteggiata si riferisce alla seconda).

Per entrambe le curve, come già è stato detto in precedenza, ha significato geometrico solo quel tratto in cui è contemporaneamente

$$x > 0$$

$$y > 0$$