

SETTEMBRE 1965

IN UN RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE  $O(x,y)$  E' DATA LA CURVA DI EQUAZIONE

$$y = \frac{2mx+1}{mx-2} \quad (1)$$

ESSENDO  $m$  UNA COSTANTE REALE.

- 1) RICERCARE PER QUALE TRASLAZIONE DEGLI ASSI L'EQUAZIONE (1) ASSUME LA FORMA  $XY = K$ .
- 2) TROVARE LE COORDINATE  $x$  E  $y$  DEI PUNTI  $M, N$  COMUNI ALLA CURVA E ALLA BISETRICE DEL PRIMO E DEL TERZO QUADRANTE, INDIVIDUATI DAGLI ASSI  $Ox, Oy$  E DETERMINARE LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO  $MN$ .
- 3) VERIFICARE CHE PER QUALSIASI VALORE DEL PARAMETRO  $m$ , TUTTE LE CURVE DI EQUAZIONE (1) HANNO IN COMUNE UN MEDESIMO PUNTO  $C$  E DETERMINARE POI L'AREA DEL TRIANGOLO  $MNC$ .
- 4) DIRE PER QUALI VALORI DI  $m$  LE RETTE DI

EQUAZIONE

$$y = \frac{mx-2}{m}$$

$$y = \frac{mx-2}{2m}$$

RISULTANO TANGENTI ALLA CORRISPONDENTE CURVA DI EQUAZIONE (1) E DETERMINARE LE COORDINATE DEI PUNTI DI CONTATTO R, S, NONCHE' LA LUNGHERZA DEL SEGMENTO RS.  
5) (FACOLTATIVO) - FATTA RUOTARE LA CURVA DI EQUAZIONE (1) DI UN ANGOLO GIRO ATTORNO ALLA RETTA  $y=2$ , SI DETERMINI IL VOLUME DEL SOLIDO LIMITATO DALLA SUPERFICIE CHE COSI' SI OTTIENE E DAI PIANI PERPENDICOLARI ALL'ASSE DELLE  $x$ , PASSANTI PER I PUNTI

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{m} + \sqrt{\frac{5}{m}} \\ x_1 > x_0 \end{cases}$$

NELL'IPOTESI DI  $m$  POSITIVO.

ne Studiamo anzitutto l'andamento della funzione

$$y = \frac{2mx+1}{mx-2}$$

La curva ha un asintoto verticale di equazione

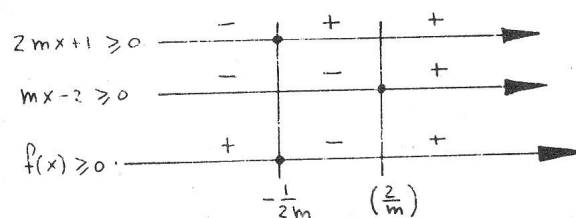
$$x = \frac{2}{m}$$

ed uno orizzontale

$$y = 2$$

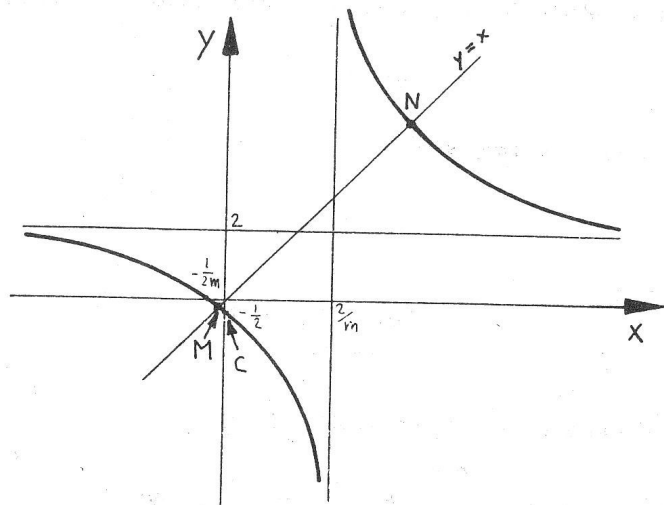
perche'

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

Studiamo il segno della  $f(x)$ 

Quindi la curva ha l'andamento seguente (vedi grafico successivo) -

Non è necessario calcolare la derivata prima e la variazione del suo segno perché già sappiamo trattarsi di una iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati.



La curva assegnata si trasforma nella

$$XY = K$$

cioè in una iperbole equilatera, se si compie la traslazione

$$\begin{cases} x = X + \frac{2}{m} \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

infatti con tale sostituzione si ottiene

$$XY = \frac{5}{m}$$

quindi

$$K = \frac{5}{m}$$

Per ottenere le coordinate dei punti M e N, risolviamo il sistema formato dalla curva e dalla retta  $y = x$

$$\begin{cases} y = \frac{2mx+1}{mx-2} \\ y = x \end{cases}$$

eliminando la  $y$  si ottiene

$$mx^2 - 2x = 2mx + 1$$

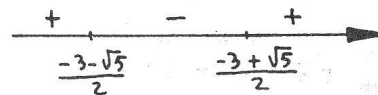
$$mx^2 - 2x(1+m) - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+m \pm \sqrt{1+m^2+2m+m}}{m} = \frac{1+m \pm \sqrt{m^2+3m+1}}{m}$$

che è reale per

$$m^2 + 3m + 1 \geq 0$$

cioè



per valori di  $m$  esterni all'intervallo.

Ma deve anche essere  $m > 0$  perché altrimenti  $K$  diventa negativo e l'iperbole equilatera occuperebbe solo il secondo e il quarto quadrante non potendo così incontrare mai la retta  $y=x$ .

È sufficiente quindi dire che le coordinate dei punti  $M$  ed  $N$  sono reali se risulta

$$m > 0$$

in quanto con tale limitazione è soddisfatta anche la limitazione precedente.

Le coordinate dei punti sono in tal caso

$$M \equiv \left( \frac{1+m-\sqrt{m^2+3m+1}}{m}; \frac{1+m-\sqrt{m^2+3m+1}}{m} \right)$$

$$N \equiv \left( \frac{1+m+\sqrt{m^2+3m+1}}{m}; \frac{1+m+\sqrt{m^2+3m+1}}{m} \right)$$

La distanza  $MN$  è allora

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{2 \cdot \left( \frac{1+m+\sqrt{\Delta}}{m} - \frac{1+m-\sqrt{\Delta}}{m} \right)^2} = \frac{2}{m} \sqrt{2\Delta} = \\ &= \frac{2}{m} \sqrt{2m^2+6m+2} \end{aligned}$$

Occupiamoci ora del terzo quesito. La curva non dipende dal parametro  $m$  quando si verificano quelle condizioni tali per cui  $m$  scompare dalla funzione

$$y = \frac{2mx+1}{mx-2}$$

ciò avviene quando  $x=0$  cioè quando  $y = -\frac{1}{2}$ . Quindi la funzione passa per il punto

$$C \equiv \left( 0; -\frac{1}{2} \right)$$

qualunque sia il valore di  $m$ .

Per calcolare l'area del triangolo  $MNC$  consideriamo come base il lato  $MN$ . Ne consegue che l'altezza coincide con la distanza del punto  $C$  dalla retta  $y=x$ . Perciò l'altezza è

$$h = \frac{|y_0 - x_0|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

quindi l'area del triangolo  $MNC$  è

$$S = \frac{\overline{MN} \cdot h}{2} = \frac{2}{m} \sqrt{2m^2+6m+2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{m^2+3m+1}}{2m}$$

Passiamo al quarto quesito e imponiamo la tangenza fra la prima retta e la curva

$$\begin{cases} y = \frac{2mx+1}{mx-2} \\ y = \frac{mx-2}{m} \end{cases}$$

eliminando la  $y$  si trova

$$m^2x^2 - 2mx(2+m) + 4 - m = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \longrightarrow \quad m = -5$$

Imponiamo anche la tangenza fra la seconda retta e la curva

$$\begin{cases} y = \frac{2mx+1}{mx-2} \\ y = \frac{mx-2}{2m} \end{cases}$$

eliminando la  $y$  si trova

$$m^2x^2 - 4m(1+m)x + 4 - 2m = 0 \quad (**)$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \longrightarrow \quad m = -\frac{5}{2}$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di contatto  $R$  e  $S$ .

La  $(*)$  con  $m = -5$  diventa

$$25x^2 - 30x + 9 = 0$$

e perciò  $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = 1 \end{cases}$

e le coordinate di  $R$  sono

$$R \equiv \left(\frac{3}{5}; 1\right)$$

La  $(**)$  con  $m = -\frac{5}{2}$  diventa

$$25x^2 - 60x + 36 = 0$$

da cui si ricava  $\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 1 \end{cases}$

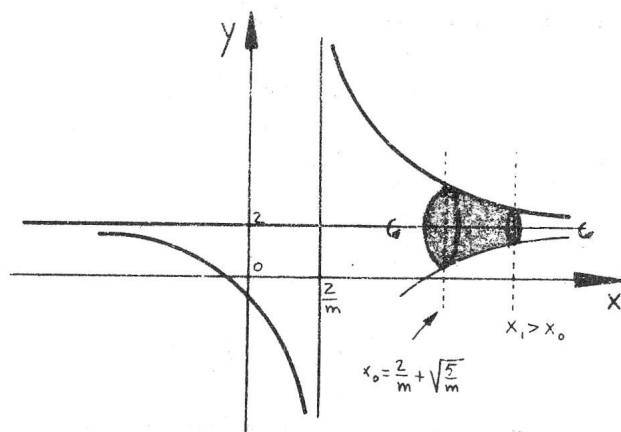
e quindi le coordinate di  $S$  sono

$$S \equiv \left(\frac{6}{5}; 1\right)$$

e la lunghezza del segmento  $\overline{RS}$  è

$$\overline{RS} = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{3}{5}$$

Occupiamoci infine dell'ultimo quesito.



Ci conviene riferirci alla curva di equazione

$$xy = \frac{5}{m}$$

esplicitata rispetto alla  $y$

$$y = \frac{5}{mx}$$

perché in tal caso l'asse delle ascisse coincide con l'asse di rotazione, e il calcolo del volume è più agevole.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{x_0}^{x_1} f^2(x) dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{25}{m^2 x^2} dx = \\ &= \frac{25\pi}{m^2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2} = \frac{25\pi}{m^2} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{x_1} = \\ &= \frac{25\pi}{m^2} \left( -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{\frac{2}{m} + \sqrt{\frac{5}{m}}} \right) = \frac{25\pi}{m^2} \left( m \frac{2 - \sqrt{5}m}{4 - 5m} - \frac{1}{x_1} \right) \end{aligned}$$