

5.

LUGLIO 1966

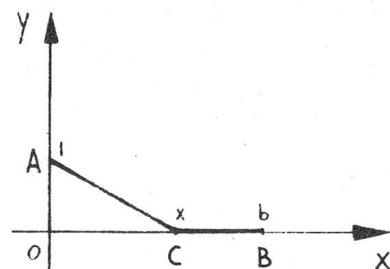
IN UN PIANO, SUL QUALE E' FISSATO UN SISTEMA CARTESIANO ORTOGONALE $O(x,y)$ SONO DATI I PUNTI $A \equiv (0;1)$, $B \equiv (b;0)$. SI DETERMINI SULL'ASSE x UN PUNTO C TALE CHE RISULTI

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$$

DISCUSSIONE - SUCCESSIVAMENTE SI GENERALIZZI LA QUESTIONE SUPPONENDO CHE IL PREDETTO RAPPORTO SIA UGUALE AD UN NUMERO POSITIVO ASSEGNATO K .

OTTENUTA L'EQUAZIONE IN x CHE RISOLVE IL PROBLEMA, SI PONGA $x = X$, $K^2 = Y$, SI ESPRIMA Y IN FUNZIONE DI X E SI STUDI L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE $Y(X)$, DISTINGUENDO I CASI $b \geq 1$. INFINE SI UTILIZZI IL GRAFICO DI TALE FUNZIONE PER DETERMINARE I VALORI DI X CORRISPONDENTI AD UN ASSEGNATO VALORE DI K .
(FACOLTATIVAMENTE) - SI RITROVINO I RISULTATI PRECEDENTI PER VIA SINTETICA, CONSIDERANDO IL PUNTO C COME INTERSEZIONE

DELLA RETTA x CON IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI P DEL PIANO LE CUI DISTANZE BP E AP DA B E DA A STIANO NEL RAPPORTO K .



$$BC = |b - x|$$

$$AC = \sqrt{1 + x^2}$$

Applichiamo la relazione fornita dal testo.

$$\frac{|b - x|}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{4}{3}$$

cioè

$$3|b - x| = 4\sqrt{1 + x^2}$$

eleviamo al quadrato i due membri (il modulo si elimina), semplifichiamo e ordiniamo. Si ottiene

$$7x^2 + 18bx + 16 - 9b^2 = 0$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

Non esistendo alcuna limitazione né per b né per x , vi sono sempre due soluzioni accettabili purché il discriminante dell'equazione non risulti negativo. Cioè quando

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \longrightarrow 81b^2 - 7(16 - 9b^2) \geq 0$$

$$9b^2 \geq 7$$

$$b \leq -\frac{\sqrt{7}}{3} \quad b \geq \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Operiamo la generalizzazione indicata dal problema

$$\frac{BC}{AC} = K \quad \text{con } K > 0$$

cioè

$$|b - x| = K\sqrt{1 + x^2}$$

$$b^2 + x^2 - 2bx = K^2 + K^2x^2$$

$$x^2(1 - K^2) - 2bx + b^2 - K^2 = 0$$

poniamo ora

$$\begin{cases} x = X \\ K^2 = Y \end{cases}$$

si ottiene

$$X^2(1 - Y) - 2bX + b^2 - Y = 0$$

ed esplicitando rispetto a Y

$$Y = \frac{x^2 - 2bx + b^2}{1 + x^2}$$

Studiamo ora l'andamento di questa funzione. Non vi sono asintoti verticali o obliqui. Vi è però un asintoto orizzontale di equazione $Y=1$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Le intersezioni con gli assi hanno coordinate

x	0	b
Y	b^2	0

Studiamo il segno della $f(x)$

$x^2 - 2bx + b^2 \geq 0$	+	+
$1 + x^2 \geq 0$	+	+
$f(x) \geq 0$	+	+

Calcoliamo la derivata prima

$$Y' = \frac{(2x - 2b)(1 + x^2) - 2x(x^2 - 2bx + b^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$Y' = \frac{2(x - b)(1 + bx)}{(1 + x^2)^2}$$

Studiamone il segno

$x - b \geq 0$	-	-	+
$1 + bx \geq 0$	-	+	+
$(1 + x^2)^2 \geq 0$	+	+	+
$f'(x) \geq 0$	+	-	+

$-\frac{1}{b}$ b
 max min

Abbiamo supposto $b > 0$. Nel caso in cui fosse $b < 0$ si avrebbe

$f'(x) \geq 0$	+	-	+
----------------	---	---	---

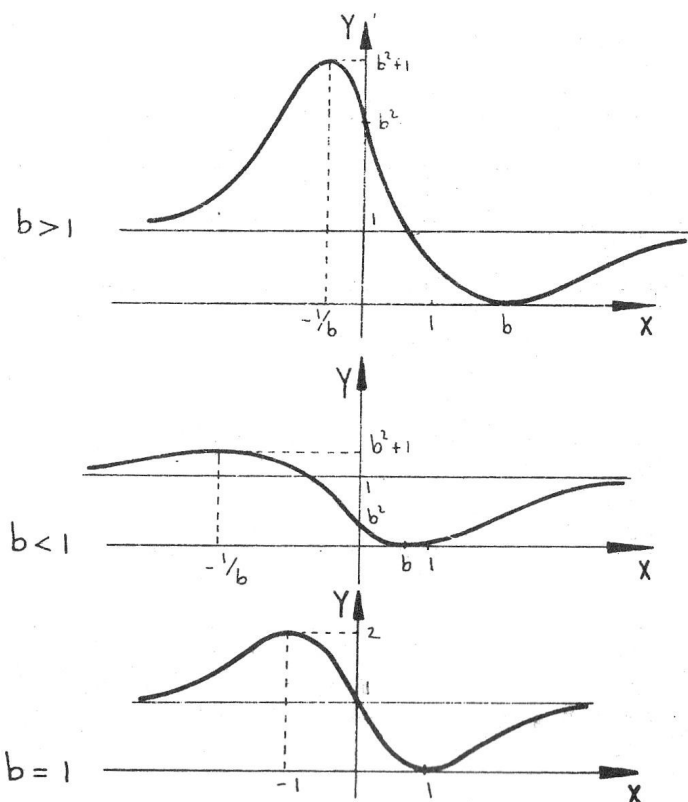
b $-\frac{1}{b}$
 max min

cioè sostanzialmente una situazione identica alla precedente, salvo una inversione fra b e $-\frac{1}{b}$.

Le ordinate dei due punti caratteristici sono

$$f(b) = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{b}\right) = 1 + b^2$$



A seconda che $b \geq 1$ si ottengono i tre grafici della pagina precedente.

Da essi si può anche constatare che in ogni caso (eccetto $K=1$) si sono due intersezioni con la retta

$$Y = K^2$$

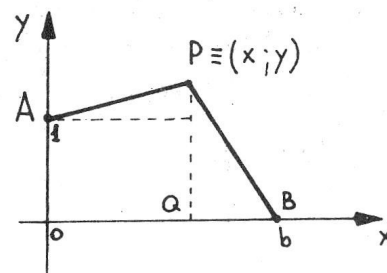
e quindi due soluzioni, per

$$0 \leq Y \leq b^2 + 1$$

e quindi per

$$0 \leq K \leq \sqrt{b^2 + 1}$$

Riguardo infine la parte facoltativa, consideriamo un punto generico $P \equiv (x; y)$ tale che le distanze BP e AP abbiano un rapporto pari a K



$$\frac{BP}{AP} = K$$

Si ricava

$$AP = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$BP = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

e applicando la relazione data dal testo

$$\frac{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = K$$

elevando al quadrato ambo i membri si ha

$$\frac{b^2 - 2bx + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = K^2$$

Vincolando il punto P a giacere sull'asse x si riottiene chiaramente la situazione già presa in considerazione nelle pagine precedenti.

Tale vincolo si impone ponendo a sistema la funzione precedente con l'equazione dell'asse x ($y=0$).

$$\begin{cases} \frac{b^2 - 2bx + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = K^2 \\ y=0 \end{cases}$$

Si ottiene

$$\frac{b^2 + x^2 - 2bx}{x^2 + 1} = K^2$$

cioè la funzione già studiata.