

LUGLIO 1967

IN UN PIANO, RIFERITO AD UN SISTEMA CARTESIANO ORTOGONALE  $O(x,y)$ , SI CONSIDERINO LE PARABOLE DI EQUAZIONE

$$1) \quad y = mx^2 + x + 3 - 4m$$

ESSENDO  $m$  UN PARAMETRO DIVERSO DA ZERO.

a) SI DETERMININO LE COORDINATE DEL VERTICE DELLA GENERICA PARABOLA 1) IN FUNZIONE DI  $m$ . SUCCESSIVAMENTE, ELIMINANDO  $m$  FRA LE RELAZIONI COSÌ TROVATE, SI STUDI LA CURVA DI EQUAZIONE  $y = f(x)$  CHE COSÌ SI OTTIENE (LUOGO DEI VERTICI DELLE PARABOLE), E IN PARTICOLARE SI TROVINO I PUNTI A E B IN CUI LA FUNZIONE  $f(x)$  HA RISPETTIVAMENTE UN MASSIMO O UN MINIMO RELATIVO.

b) SI VERIFICHI CHE TUTTE LE PARABOLE CONSIDERATE PASSANO PER I PUNTI A E B E SI DIA UNA GIUSTIFICAZIONE DI CIÒ.

c) TRA LE PARABOLE DI EQUAZIONE 1) SI STUDINO QUELLE AVENTI PER VERTICE O A O B E SI PROVI CHE ESSE SONO FRA LORO

SIMMETRICHE RISPETTO AL PUNTO MEDIO C DEL SEGMENTO AB.

d) SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE FINITA LIMITATA DALLE DUE PARABOLE DI CUI AL PUNTO c) -

calcoliamo il vertice della famiglia di parabole

$$V \equiv \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) \rightarrow V \equiv \left( -\frac{1}{2m}; \frac{12m-16m^2-1}{4m} \right)$$

Il luogo geometrico descritto dal punto V al variare di m è

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2m} \\ y = \frac{12m-16m^2-1}{4m} \end{cases}$$

ricavando m dalla prima equazione e sostituendo nella seconda:

$$y = \frac{12\left(-\frac{1}{2x}\right) - 16\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 - 1}{4\left(-\frac{1}{2x}\right)}$$

cioè semplificando

$$y = \frac{x^2 + 6x + 4}{2x}$$

Studiamo la funzione.  
Vi è un asintoto verticale per  $x=0$  e un asintoto obliquo di equazione

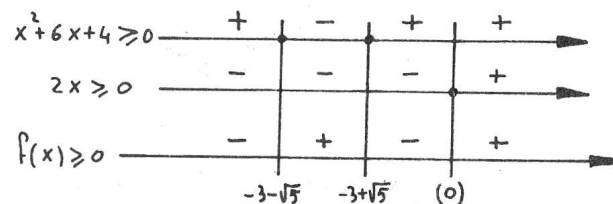
$$y = \frac{x}{2} + 3$$

perché

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x} = 3 \end{cases}$$

La curva attraversa l'asse x nei punti di ascissa  $x = -3 \pm \sqrt{5}$

Studiando il segno della funzione  $f(x)$  si ottiene



Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

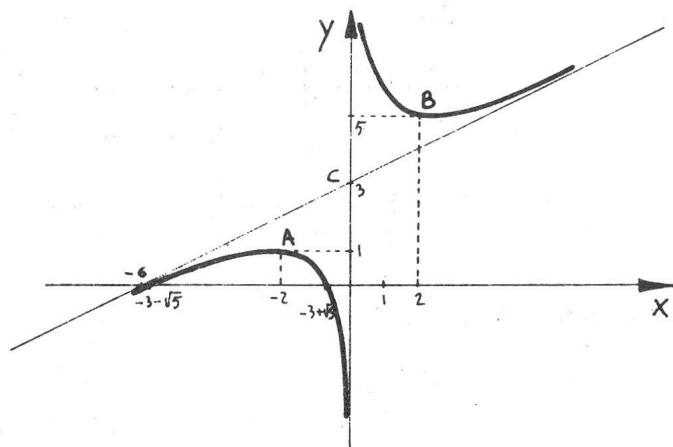
e studiamone il segno

$x^2 - 4 \geq 0$	+	-	-	+
$2x^2 \geq 0$	+	+	+	+
$f'(x) \geq 0$	+	-	-	+
	-2	(0)	2	
	max		min	

Le coordinate dei due punti caratteristici sono

$$A \equiv (-2; 1) \quad B \equiv (2; 5)$$

e il grafico conclusivo è il seguente



La famiglia di parabole

$$y = mx^2 + x + 3 - 4m$$

passa per i punti A e B qualunque sia il valore del parametro  $m$ , infatti sostituendo in essa le coordinate di tali punti si ottiene

$$1 = 4m - 2 + 3 - 4m$$

$$1 = 1$$

$$5 = 4m + 2 + 3 - 4m$$

$$5 = 5$$

Ciò si verifica perché la famiglia di cui sopra si può ottenere imponendo all'equazione generica

$$y = ax^2 + bx + c$$

di passare proprio per i punti  $A \equiv (-2; 1)$  e  $B \equiv (2; 5)$ . Infatti da tale imposizione si ricade il sistema

$$\begin{cases} 1 = 4a - 2b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

e risolvendo rispetto a "b" e "c"

$$b = 1$$

$$c = 3 - 4a$$

e l'equazione generica diventa

$$y = 2x^2 + x + 3 - 4a$$

cioè formalmente identica alla famiglia di parabole del testo.

Individuiamo ora nella famiglia di parabole quelle due i cui vertici coincidono con i punti A e B. Ricordando che l'ascissa generica del vertice della famiglia è

$$x = -\frac{1}{2m}$$

basta imporre che essa coincida con le ascisse di A e B. Cioè

$$-\frac{1}{2m} = -2 \quad \longrightarrow \quad m = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2m} = 2 \quad \longrightarrow \quad m = -\frac{1}{4}$$

E sostituendo questi valori nell'equazione generica della famiglia si ottengono le due parabole cercate

$$y = \frac{x^2}{4} + x + 2$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + x + 4$$

Proponiamoci ora di dimostrare che esse sono simmetriche rispetto al punto medio del segmento AB. Esso ha coordinate

$$C = (0; 3)$$

Operiamo una traslazione degli assi coordinati in modo da trasportare il punto C nell'origine del nuovo riferimento. Basta porre

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

Le equazioni delle due parabole diventano

$$Y + 3 = \frac{X^2}{4} + X + 2 \quad \longrightarrow \quad Y = \frac{X^2}{4} + X - 1$$

$$Y + 3 = -\frac{X^2}{4} + X + 4 \quad \longrightarrow \quad Y = -\frac{X^2}{4} + X + 1$$

Ebbene, per provare l'asserto basta mostrare come queste due ultime equazioni siano curve simmetriche rispetto all'origine del nuovo sistema di riferimento (coincidente con il punto C).

Deve risultare

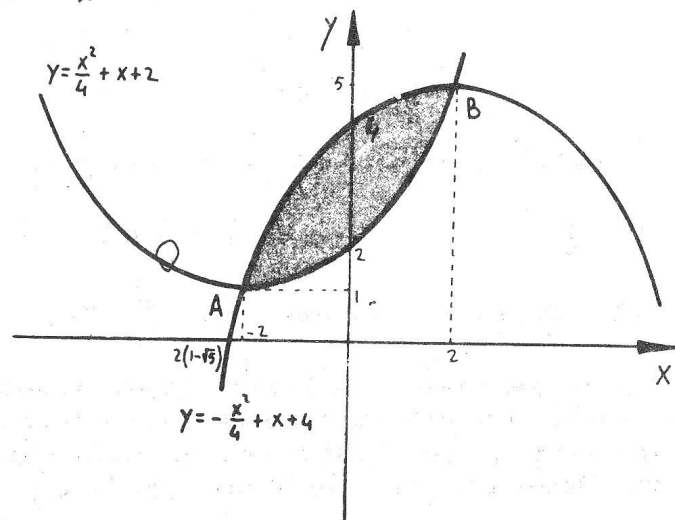
$$f(x) = -f(-x)$$

ed infatti

$$\frac{x^2}{4} + x - 1 = -\left(-\frac{x^2}{4} - x + 1\right)$$

è identicamente soddisfatta.

Occupiamoci infine dell'ultima richiesta del testo. Le due parabole in oggetto sono riportate nel grafico seguente



I due punti di intersezione fra le due parabole sono proprio i punti A e B in quanto, come si è visto in precedenza, tutte le parabole della famiglia (e quindi anche quelle in questione) sono vincolate a passare per A e B.

Calcoliamo la superficie della regione colorata in scuro:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + x + 4\right) dx - \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{4} + x + 2\right) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^2 = \\ &= \left(-\frac{4}{3} + 16\right) - \left(\frac{4}{3} + 8\right) = \frac{44}{3} - \frac{28}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$