

8.

SETTEMBRE 1967

DETERMINARE LA RELAZIONE CHE DEVE  
SUSSISTERE TRA I DUE PARAMETRI  $K$  ED  $m$   
AFFINCHÉ UNA DELLE RADICI DELL'EQUA-  
ZIONE

$$x^2 + 2(K+1)x + m^2 K^2 = 0$$

RISULTI DOPPIA DELL'ALTRA -

NEL CASO  $m = \sqrt{2}$ , DALLA RELAZIONE  
COSÌ TROVATA SI DETERMINI IL VALORE DI  
 $K$  E SI STUDI LA PARABOLA DI EQUA-  
ZIONE

$$y = x^2 + 2(K+1)x + m^2 K^2$$

DOVE  $m$  E  $K$  HANNO I PREDETTI VALORI  
PARTICOLARI -

CONSIDERATA POI LA RETTA DI EQUAZIO-  
NE  $y = -\frac{3}{4}$  E DETTI  $A, B$  I SUOI PUNTI  
DI INTERSEZIONE CON LA PARABOLA, SI  
SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA  
PASSANTE PER ESSI E IVI TANGENTE ALLA  
PARABOLA STESSA - SI VERIFICHI INFINE CHE  
DETTO  $C$  IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA,

L'ANGOLO ACB E' RETTO -

Le soluzioni della

$$x^2 + 2(K+1)x + m^2 K^2 = 0$$

Sono

$$x_{1,2} = -(K+1) \pm \sqrt{(K+1)^2 - m^2 K^2}$$

e le due soluzioni sono una doppia dell'altra quando

$$x_2 = 2x_1$$

cioè

$$-(K+1) + \sqrt{(K+1)^2 - m^2 K^2} = 2 \left[ -(K+1) - \sqrt{(K+1)^2 - m^2 K^2} \right]$$

$$K+1 = -3\sqrt{(K+1)^2 - m^2 K^2}$$

elevando al quadrato i due membri, semplificando e risolvendo si ha

$$K^2(9m^2 - 8) - 16K - 8 = 0$$

che è la relazione cercata -

Poniamo ora  $m = \sqrt{2}$  e calcoliamo K

$$5K^2 - 8K - 4 = 0 \longrightarrow K = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{5} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{5} \end{cases}$$

ed entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfanno l'equazione irrazionale iniziale -

Con i valori così ottenuti, dalla parabola generica

$$y = x^2 + 2(K+1)x + m^2 K^2$$

si ricavano le equazioni di due parabole

$$\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ K = 2 \end{cases} \longrightarrow y = x^2 + 6x + 8$$

$$\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ K = -\frac{2}{5} \end{cases} \longrightarrow y = x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{8}{25}$$

Doendo ora considerare le intersezioni di queste parabole con la retta  $y = -\frac{3}{4}$ , facendo i calcoli ci si accorge che la seconda parabola non interseca la retta suddetta, e quindi la sua equazione va scartata e ci occuperemo solo della prima parabola -

Le sue intersezioni con la retta  $y = -\frac{3}{4}$  hanno coordinate

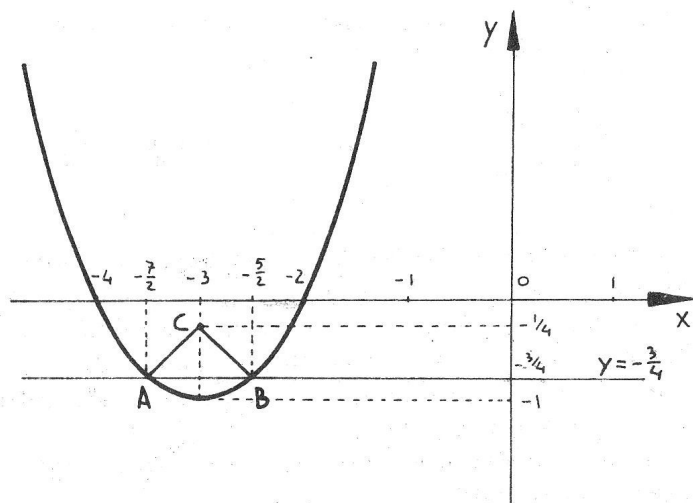
$$A = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{3}{4}\right) \quad B = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)$$

Le coordinate del vertice sono

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \longrightarrow V = (-3, -1)$$

Le intersezioni con gli assi

x	0	-2	-4
y	8	0	0



Ora imponiamo all'equazione generica di una circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

di passare per A e B. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{49}{4} + \frac{9}{16} - \frac{7}{2}a - \frac{3}{4}b + c = 0 \\ \frac{25}{4} + \frac{9}{16} - \frac{5}{2}a - \frac{3}{4}b + c = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 56a + 12b - 16c = 205 \\ 40a + 12b - 16c = 109 \end{cases}$$

e risolvendo rispetto ad "a" e "c" si ricava

$$\begin{cases} a = 6 \\ c = \frac{12b + 131}{16} \end{cases}$$

Sostituiamo tali valori nell'equazione generica

$$x^2 + y^2 + 6x + by + \frac{12b + 131}{16} = 0$$

cioè

$$16x^2 + 16y^2 + 96x + 16by + 12b + 131 = 0$$

Per eliminare anche il parametro b dovremo ora porre quest'equazione a sistema con l'equazione della parabola

$$y = x^2 + 6x + 8$$

ed applicare quindi la condizione di tangenza.

Ma così facendo si ottiene un'equazione di quarto grado di difficile soluzione.

Conviene allora seguire una via diversa. Calcoliamo la derivata della parabola nel punto B

$$y' = 2x + 6$$

$$f'(-\frac{5}{2}) = 1$$

e quindi il coefficiente angolare di una retta tangente alla parabola nel punto B è  $m=1$ .

La retta BC passante per il centro C della circonferenza ha quindi coefficiente angolare  $m=-1$  ed equazione

$$y + \frac{3}{4} = -1 \left( x + \frac{5}{2} \right)$$

e cioè

$$y = -x - \frac{13}{4}$$

Le coordinate del centro C si ottengono risolvendo il sistema formato dall'equazione di questa retta e dall'equazione

$$x = -3$$

perché per ragioni di simmetria C deve trovarsi su tale retta.

$$\begin{cases} y = -x - \frac{13}{4} \\ x = -3 \end{cases}$$

e si ottiene

$$C \equiv \left( -3; -\frac{1}{4} \right)$$

quindi nell'equazione della circonferenza avremo

$$b = -2\beta = -2 \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

e la stessa diventa allora

$$16x^2 + 16y^2 + 96x + 8y + 137 = 0$$

Riguardo infine all'ultima richiesta del problema, per ragioni di simmetria la retta tangente alla parabola nel punto A ha coefficiente angolare  $m=-1$ . La retta passante per A e C ha perciò coefficiente angolare  $m=1$  ed è perpendicolare alla retta BC.

Quindi l'angolo ACB è retto.