9.

LUGLIO 1968

SIA ABC UN TRIANGOLO EQUILATERO DI LATO a ED E UN PUNTO GENERICO DEL LATO AC.

CONDOTTA DA E LA PARALLELA AD AB ED INDICATA CON F LA SUA INTERSEZIONE CON BC, SI DENOTI CON D IL PUNTO DEL PROLUNGAMENTO DI EF, DALLA PARTE DI F, TALE CHE SIA $FD = \frac{EF}{2}$. SI DETERMINI IL PUNTO E IN GUISA CHE SI ABBIA:

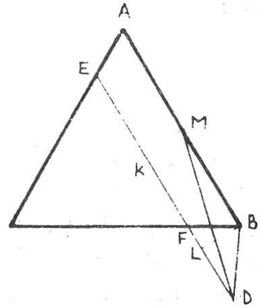
$$\overline{MD}^2 + \overline{BD}^2 = Ka^2$$

ESSENDO M IL PUNTO MEDIO DI AB E K UN NUMERO REALE DATO.

SI ACCERTI POI PER QUALI VALORI DI K IL TRAPEZIO ABDE RISULTI

1) RETTANGOLO,
2) O ISOSCELE,
3) O PARALLELOGRAMMO.

FACOLTATIVAMENTE: SI GENERALIZZI LA QUESTIONE SUPPONENDO CHE IL PUNTO E STIA SULLA "RETTA" AC, NEL QUAL CASO SI CONSIGLIA DI RICORRERE AI LUOGHI GEOMETRICI AI QUALI DEVE APPARTENERE IL PUNTO D PER SODDISFARE ALLE CONDIZIONI ASSEGNATE.



Poniamo

$$CE = EF = CF = x$$

Conoscendo il lato a di un triangolo equilatero, la sua altezza è

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

quindi risulta

$$\begin{cases} CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ CK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

perciò

$$MK = BL = CM - CK = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$$

Calcoliamo KD ed LD

$$KD = \frac{EF}{2} + FD = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

essendo il triangolo FLB simile al triangolo BMC triangoli rettangoli con due cateti rispettivamente perpendicolari), è anch'esso mezzo triangolo equilatero e perciò

$$FL = \frac{FB}{2} = \frac{a - x}{2}$$

quindi

$$LD = FD - FL = \frac{x}{2} - \frac{a - x}{2} = \frac{2x - a}{2}$$

Applicando ora il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli MKD e BLD, ci ricaviamo le ipotenuse MD e BD:

$$\overline{MD}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{KD}^2 = \frac{3}{4}(a-x)^2 + x^2 = \frac{7x^2 - 6ax + 3a^2}{4}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{LD}^2 = \frac{3}{4}(a-x)^2 + \frac{(2x-a)^2}{4} = \frac{7x^2 - 10ax + 4a^2}{4}$$

ed applicando infine la relazione parametrica fornita dal testo, si ha

$$\frac{7x^2 - 6ax + 3a^2}{4} + \frac{7x^2 - 10ax + 4a^2}{4} = Ka^2$$

cioè

$$\boxed{\begin{array}{c} 14x^2 - 16ax + 7a^2 - 4Ka^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq a \\ a > 0 \qquad K > 0 \end{array}}$$

Discutiamo geometricamente l'equazione. Ponendo $K = y$ si ottiene un sistema costituito da un fascio di rette parallele all'asse x e una parabola con asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso l'alto :

$$\begin{cases} y = K \\ y = \dfrac{7x^2}{2a^2} - \dfrac{4x}{a} + \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Il vertice della parabola ha coordinate

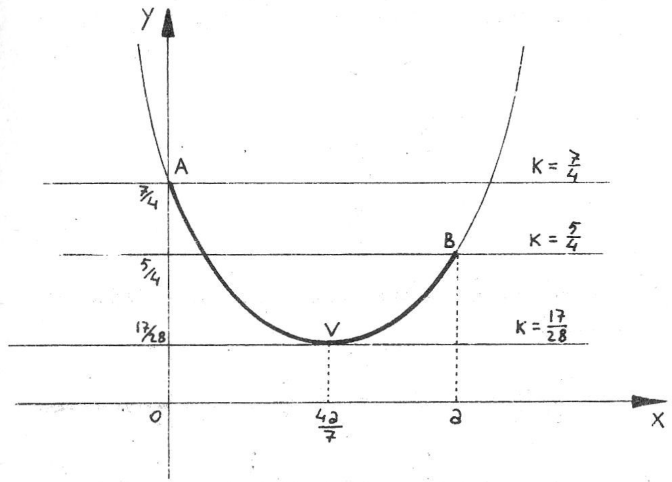
$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right) \longrightarrow V \equiv \left(\frac{4a}{7} ; \frac{17}{28}\right)$$

La parabola interseca gli assi solo nel punto

$$A \equiv \left(0 ; \frac{7}{4}\right)$$

Poichè l'incognita x deve essere compresa fra 0 e a, e per tali ascisse la parabola assume le ordinate $\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{4}$, riferendoci al grafico della pagina seguente dobbiamo prendere in considerazione solo quell'arco di parabola compreso fra tali valori (che nella figura è disegnato con tratto più marcato).

Al variare del parametro K, le intersezioni fra la parabola e la retta generica del fascio, cioè le soluzioni cercate, sono le seguenti :



due soluz. coincidenti per $K = \frac{17}{28}$

due soluz. distinte per $\frac{17}{28} < K < \frac{5}{4}$

una soluz. normale e una limite per $K = \frac{5}{4}$

una soluz. normale per $\frac{5}{4} < K < \frac{7}{4}$

una soluz. limite per $K = \frac{7}{4}$

Passiamo ora alla determinazione di quei valori del parametro K che soddisfano le richieste del testo.

Il trapezio ABDE diventa rettangolo quando

$$\overline{LD} = 0$$

cioè

$$\frac{2x-a}{2} = 0$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Sostituendo tale valore nell'equazione della parabola si ottiene

$$y = \frac{7}{2a^2} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{4}{a} \cdot \frac{a}{2} + \frac{7}{4} = \frac{5}{8}$$

quindi il trapezio diventa rettangolo quando $K = \frac{5}{8}$.

Il trapezio diventa invece isoscele quando

$$\overline{FD} = 0 \longrightarrow \frac{x}{2} = 0 \longrightarrow x = 0$$

e, sostituendo nell'equazione della parabola, si ha

$$y = 0 + 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

quindi $K = \frac{7}{4}$.

Infine il trapezio diventa un parallelogramma quando

$$\overline{ED} = \overline{AB}$$

e cioè

$$\overline{EF} + \overline{FL} + \overline{LD} = \overline{AB}$$

$$x + \frac{a-x}{2} + \frac{2x-a}{2} = a$$

$$x = \frac{2a}{3}$$

e sostituendo nell'equazione della parabola,

$$y = \frac{7}{2a^2} \cdot \frac{4a^2}{9} - \frac{4}{a} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{7}{4} = \frac{23}{36}$$

e perciò

$$K = \frac{23}{36}$$

Riguardo infine alla generalizzazione della discussione nel caso in cui il punto E stia sulla "retta" AC (indifferentemente sul prolungamento dalla parte di A o dalla parte di C), grazie alla discussione geometrica da noi adottata, non vi è alcun bisogno di ricorrere ai luoghi geometrici come consiglia il testo, ma è sufficiente considerare la x variabile da $-\infty$ a $+\infty$ invece che fra 0 ed a.

Ciò implica come conseguenza che dovremo prendere in considerazione non un arco, ma tutta la parabola.

Quindi in tal caso possiamo concludere che vi sono due soluzioni reali coincidenti per

$$K = \frac{17}{28}$$

e due soluzioni reali e distinte per

$$K > \frac{17}{28}$$

per l'interpretazione dei risultati occorre tener presente che soluzioni positive maggiori di a corrispondono a situazioni geometriche in cui il punto E si trova sul prolungamento della retta AC dalla parte di A.

Mentre invece soluzioni negative corrispondono a situazioni geometriche in cui il punto E si trova sul prolungamento della retta AC dalla parte di C.