

SETTEMBRE 1968

IN UN PIANO, RIFERITO AD UN SISTEMA CARTESIANO ORTOGONALE, SIANO DATI UN PUNTO $P \equiv (k, k)$ ED UNA RETTA r PASSANTE PER IL PUNTO $A \equiv (-1, 0)$.

SI SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO P PASSANTE PER L'ORIGINE O DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO E SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI DI INTERSEZIONE CON LA RETTA r .

SI CALCOLINO POI LE COORDINATE DEI PUNTI P PER I QUALI LA CIRCONFERENZA RISULTA TANGENTE ALLA PREFISSATA RETTA r E, SUCCESSIVAMENTE, SI ESAMININO I CASI PARTICOLARI IN CUI IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI r SIA UGUALE AD UNO, OPPURE A ZERO, O TENDA ALL'INFINITO.

L'equazione generica di una circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

e, nel nostro caso, avremo

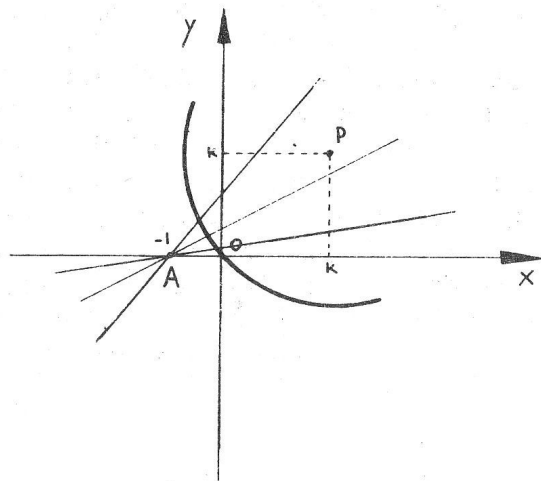
$$\alpha = \beta = K$$

$$r = OP = K\sqrt{2}$$

e quindi la circonferenza cercata è

$$x^2 + y^2 - 2Kx - 2Ky + K^2 + K^2 - 2K^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2Kx - 2Ky = 0$$



L'equazione del fascio di rette passanti per A è

$$y = m(x+1)$$

Le coordinate dei punti di intersezione fra la circonferenza e la retta generica del fascio, si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2Kx - 2Ky = 0 \\ y = mx + m \end{cases}$$

facendo i calcoli si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{K + Km - m^2 \pm \sqrt{(K + Km - m^2)^2 - (1 + m^2)(m^2 - 2Km)}}{1 + m^2} \\ y = \frac{mK + Km^2 + m \pm m\sqrt{(K + Km - m^2)^2 - (1 + m^2)(m^2 - 2Km)}}{1 + m^2} \end{cases}$$

La retta generica del fascio risulta tangente alla circonferenza quando i due radicali si annullano, cioè quando

$$(K + Km - m^2)^2 - (1 + m^2)(m^2 - 2Km) = 0$$

e, risolvendo rispetto a K

$$K^2(1+m)^2 - 2Km(m-1) - m^2 = 0$$

$$K = \frac{m(m-1) \pm \sqrt{m^2(m-1)^2 + m^2(1+m)^2}}{(1+m)^2}$$

cioè semplificando

$$K = \frac{m(m-1) \pm m\sqrt{2(m^2+1)}}{(1+m)^2}$$

Ricerchiamo infine quei valori di K per i quali il coefficiente angolare m della retta generica passante per A risulta rispettivamente uguale ad uno, a zero e ad infinito.

A tale scopo è sufficiente calcolare i limiti della precedente espressione per m tendente ai suddetti valori.

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{m(m-1) \pm m\sqrt{2(m^2+1)}}{(1+m)^2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{m(m-1) \pm m\sqrt{2(m^2+1)}}{(1+m)^2} = 0$$

Con il terzo limite si ottiene la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che può essere eliminata, senza ricorrere al teorema dell'Hopital, dividendo numeratore e denominatore dell'espressione per m^2 .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{m} \pm \sqrt{2 + \frac{2}{m^2}}}{1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Quindi le tre condizioni volute si verificano rispettivamente quando

$$K = \pm \frac{1}{2}$$

$$K = 0$$

$$K = 1 \pm \sqrt{2}$$