

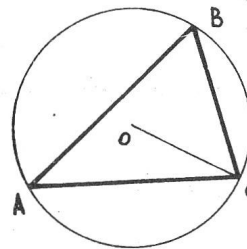
11.

LUGLIO 1969

LE LUNGHEZZE DEI LATI  $BC, CA, AB$  DEL TRIANGOLO  $ABC$  SONO RISPETTIVAMENTE  $2a, s-x, s+x$ , ESSENDO  $a$  ED  $s$  ELEMENTI DATI.

SI ESPRIMANO PER MEZZO DEI DATI E DI  $x$  L'AREA DEL TRIANGOLO ED IL RAGGIO  $R$  DEL CERCHIO AD ESSO CIRCOSCRITTO (SI RICORDI CHE LA LUNGHEZZA DEL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AD UN TRIANGOLO E' UN QUARTO DEL RAPPORTO FRA IL PRODOTTO DELLE LUNGHEZZE DEI LATI E L'AREA).

INDI SI STUDI L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE  $R^2(x)$ , INDICANDO IN PARTICOLARE GLI INTERVALLI NEI QUALI ESSA E' CRESCENTE O DECRESCENTE.



$$BC = 2a$$

$$AC = s - x$$

$$AB = s + x$$

Poichè, per evidenti ragioni geometriche, il segmento BC deve essere positivo, ne deriva per la limitazione

$$a > 0$$

Inoltre, poichè in ogni triangolo un lato deve essere sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza - Applicando tali limitazioni al triangolo in questione si ottiene:

$$\begin{array}{lll} BC < AB + AC & \longrightarrow & s > a \\ BC > |AB - AC| & \longrightarrow & x < a \\ AC < AB + BC & \longrightarrow & x > -a \end{array}$$

Riassumendo, i parametri del problema sono sottoposti alle seguenti limitazioni

$$\boxed{\begin{array}{l} s > a > 0 \\ -a < x < a \end{array}}$$

Passiamo ora alla determinazione del perimetro del triangolo

$$2p = 2a + (s-x) + (s+x) = 2a + 2s$$

quindi il semiperimetro è

$$p = a + s$$

Per calcolare l'area del triangolo applichiamo la formula di Erone

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} = \\ &= \sqrt{(a+s)(a+s-2a)(a+s-s+x)(a+s-s-x)} = \\ &= \sqrt{(s^2-a^2)(a^2-x^2)} \end{aligned}$$

Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo è

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S}$$

cioè

$$R(x) = \frac{2a(s+x)(s-x)}{4\sqrt{(s^2-a^2)(a^2-x^2)}} = \frac{a(s^2-x^2)}{2\sqrt{(s^2-a^2)(a^2-x^2)}}$$

Il quadrato del raggio è

$$R^2(x) = \frac{a^2(s^2 - x^2)^2}{4(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}$$

Dobbiamo quindi studiare l'andamento della funzione

$$y = \frac{a^2(s^2 - x^2)^2}{4(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)}$$

La curva è simmetrica rispetto all'asse y perché

$$f(x) = f(-x)$$

ha due asintoti verticali di equazione  $x = \pm a$ .  
Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali. Non ce ne sono neanche di obliqui in quanto il numeratore della  $f(x)$  è di quarto grado mentre il denominatore è di secondo.

Le intersezioni con gli assi hanno coordinate

|   |                            |   |    |
|---|----------------------------|---|----|
| x | 0                          | s | -s |
| y | $\frac{s^4}{4(s^2 - a^2)}$ | 0 | 0  |

(dove il valore  $\frac{s^4}{4(s^2 - a^2)}$  è positivo perché  $s > a$ ).

Studiamo il segno della  $f(x)$ :

|                      |    |      |     |   |   |
|----------------------|----|------|-----|---|---|
| $(s^2 - x^2) \geq 0$ | +  | +    | +   | + | + |
| $a^2 - x^2 \geq 0$   | -  | -    | +   | - | - |
| $f(x) \geq 0$        | -  | -    | +   | - | - |
|                      | -s | (-a) | (a) | s |   |

La derivata prima è

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-16a^2x(s^2 - x^2)(s^2 - a^2)(a^2 - x^2) + 8a^2x(s^2 - a^2)(s^2 - x^2)^2}{16(s^2 - a^2)^2(a^2 - x^2)^2} = \\ &= \frac{a^2x(s^2 - a^2)(s^2 - x^2)[(s^2 - x^2) - 2(a^2 - x^2)]}{2(s^2 - a^2)^2(a^2 - x^2)^2} = \\ &= \frac{a^2x(s^2 - x^2)(x^2 - 2a^2 + s^2)}{2(s^2 - a^2)(a^2 - x^2)^2} \end{aligned}$$

Studiamo il segno di  $f'(x)$  tenendo presente che

$$x^2 - 2a^2 + s^2 \geq 0$$

è positivo per valori di x esterni all'intervallo

delle radici

$$x = \pm \sqrt{2a^2 - s^2}$$

Per la realtà di queste radici occorre introdurre la condizione aggiunta

$$2a^2 - s^2 \geq 0 \longrightarrow a^2 \geq \frac{s^2}{2}$$

Le due radici di cui sopra risultano comprese fra i valori  $-a$  e  $a$ , infatti

$$a < s$$

$$a^2 < s^2$$

$$-a^2 > -s^2$$

$$2a^2 - a^2 > 2a^2 - s^2$$

$$a^2 > 2a^2 - s^2$$

$$a > \sqrt{2a^2 - s^2}$$

Quindi

|                           | -s  | (-a) | $-\sqrt{2a^2-s^2}$ | 0   | $\sqrt{2a^2-s^2}$ | (a) | s   |
|---------------------------|-----|------|--------------------|-----|-------------------|-----|-----|
| $x \geq 0$                | -   | -    | -                  | +   | +                 | +   | +   |
| $s^2 - x^2 \geq 0$        | -   | +    | +                  | +   | +                 | +   | -   |
| $x^2 - 2a^2 + s^2 \geq 0$ | +   | +    | -                  | -   | +                 | +   | +   |
| $(a^2 - x^2)^2 \geq 0$    | +   | +    | +                  | +   | +                 | +   | +   |
| $f'(x) \geq 0$            | +   | -    | -                  | +   | -                 | +   | -   |
|                           | max |      | min                | max | min               |     | max |

Per le ordinate dei punti caratteristici, si trova

$$f(0) = \frac{s^4}{4(s^2 - a^2)}$$

$$f(\pm \sqrt{2a^2 - s^2}) = a^2$$

$$f(\pm s) = 0$$

Il grafico concluso è il seguente. Si ricorda però che ha significato geometrico solo il tratto di curva compreso fra  $-a$  e  $a$  (a causa delle condizioni limitative viste all'inizio).

