

LUGLIO 1970

VERIFICARE CHE LE DUE CURVE PIANE, GRAFICI CARTESIANI DELLE FUNZIONI

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

HANNO DUE PUNTI IN COMUNE - INDICARE L'ANDAMENTO DEI PREDETTI GRAFICI CERCANDONE IN PARTICOLARE GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O MINIMO RELATIVI -

DETERMINARE L'AREA DELLA REGIONE PIANA LIMITATA DAI DUE ARCHI DEI GRAFICI AVENTI PER ESTREMI I DUE PUNTI COMUNI - CONSIDERATE POI LE TANGENTI AI DUE GRAFICI NEI PUNTI COMUNI, CALCOLARE L'AREA DEL QUADRILATERO CONVESSO DA ESSE DETERMINATO -

Per trovare le coordinate dei punti di intersezione, risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

facendo i calcoli si ottiene

$$A \equiv (-1; 0)$$

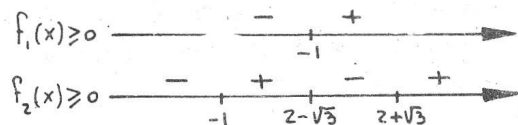
$$B \equiv (0; 1)$$

Passiamo ora alla determinazione dei due grafici. Poiché entrambi i polinomi a secondo membro, ugualizzati a zero, costituiscono delle equazioni reciproche di terzo grado prima specie, essi possono essere divisi per  $(x+1)$  con il metodo di Ruffini. Si ottengono così due equazioni in forma fattorizzata, di facile soluzione

$$(x+1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -1$$

$$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -1; x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Studiando il segno delle due funzioni, si ha

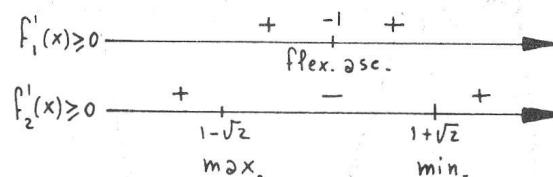


Non si sono asintoti di alcun tipo. Le derivate prime sono

$$f'_1(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$f'_2(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

e dallo studio del segno si ricava



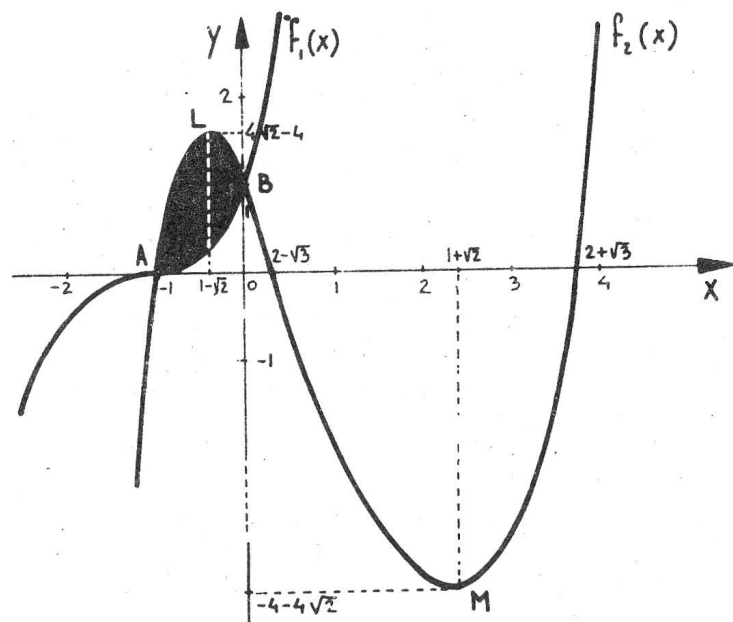
Quindi la  $f_1(x)$  ha un flesso orizzontale ascendente per  $x = -1$ , mentre la  $f_2(x)$  ha un massimo per  $x = 1-\sqrt{2}$  e un minimo per  $x = 1+\sqrt{2}$ . Le coordinate di tali punti sono:

$$A \equiv (-1; 0)$$

$$L \equiv (1-\sqrt{2}; 4\sqrt{2}-4)$$

$$M \equiv (1+\sqrt{2}; -4\sqrt{2}-4)$$

Il grafico conclusivo con l'andamento delle due curve è il seguente



Calcoliamo la superficie della regione colorata in scuro

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2 - 3x + 1) dx - \int_{-1}^0 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

Determiniamo ora le equazioni delle rette tangenti alle curve nei punti A e B - I coefficienti angolari di tali rette sono:

$$f_1'(0) = 3$$

$$f_1'(-1) = 0$$

$$f_2'(0) = -3$$

$$f_2'(-1) = 6$$

Dal fascio di rette con centro in  $A \equiv (-1; 0)$

$$y = m(x+1)$$

si ottengono le equazioni delle due rette tangenti passanti per A:

$$y = 0 \cdot (x+1) \longrightarrow y = 0$$

$$y = 6 \cdot (x+1) \longrightarrow y = 6x + 6$$

Dal fascio di rette con centro in  $B \equiv (0; 1)$

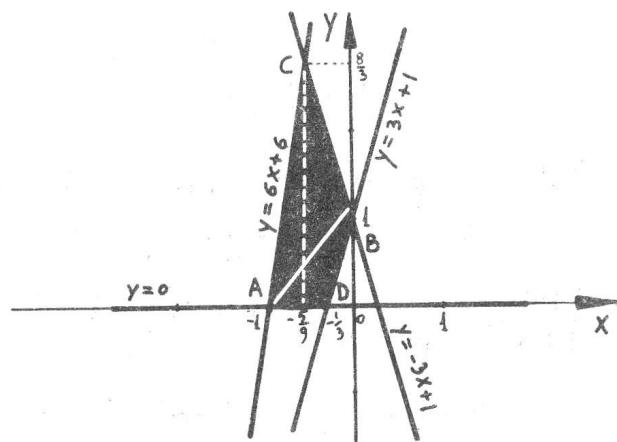
$$y - 1 = mx$$

si ottengono invece le equazioni delle due rette tangenti passanti per B:

$$y - 1 = 3x \longrightarrow y = 3x + 1$$

$$y-1 = -3x \longrightarrow y = -3x+1$$

Queste quattro rette sono riportate nel grafico seguente (le due curve non sono state tracciate per rendere più chiaro il disegno)



Oltre ai punti A e B già noti, calcoliamo le coordinate degli altri due vertici C e D del quadrilatero convesso (disegnato più scuro nel grafico):

$$\begin{cases} y = 6x+6 \\ y = -3x+1 \end{cases} \longrightarrow C \equiv \left(-\frac{5}{9}; \frac{8}{3}\right)$$

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow D \equiv \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$$

Per concludere calcoliamo la superficie del quadrilatero.

Osserviamo che esso può essere scomposto nei due triangoli ABC e ABD.

La distanza del punto B dalla retta AC è

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+36}} = \frac{5}{\sqrt{37}} = \frac{5\sqrt{37}}{37}$$

La lunghezza del segmento AC è

$$AC = \sqrt{\left(-1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{37}}{9}$$

quindi la superficie del triangolo ABC è

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot d}{2} = \frac{5\sqrt{37}}{37} \cdot \frac{4\sqrt{37}}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

quella del triangolo ABD è invece

$$S_{ABD} = \frac{AD \cdot OB}{2} = \frac{\left(-1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 1}{2} = \frac{1}{3}$$

e quindi la superficie complessiva del quadrato  
terzo è

$$S = S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{10}{9} + \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$$