

13.

LUGLIO 1970

Sessione ammalati

SI TROVINO I COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

SAPENDO CHE :

- 1) ESSA SI ANNULLA PER $x=0$
- 2) LA SUA DERIVATA PRIMA SI ANNULLA PER $x=0$, $x=1$, $x=2$
- 3) IL SUO GRAFICO, IN UN RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE $O(x;y)$, HA, NEL PUNTO DI ASCISSA $x=-1$, LA TANGENTE PARALLELA ALLA RETTA DI EQUAZIONE $y = -x$.

SI DESCRIVA L'ANDAMENTO DEL GRAFICO. INFINE SI DETERMINI L'AREA DEL RETTANGOLOIDE, RELATIVO AL GRAFICO, AVENTE PER BASE L'INTERVALLO DI ESTREMI $x=0$, $x=2$.

Imponendo il passaggio della funzione per il punto $(0; 0)$ si ottiene

$$e = 0$$

La derivata prima della funzione è

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

imponendo il passaggio per i punti $(0; 0)$, $(1; 0)$ e $(2; 0)$ si ottiene

$$d = 0$$

e il sistema

$$\begin{cases} 4a + 3b + 2c = 0 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases}$$

che, essendo costituito da due equazioni e tre incognite, può essere risolto calcolando due incognite in funzione della terza. Facendo i calcoli si ha

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 4a \end{cases}$$

Quindi, con le condizioni finora imposte all'equazione generica, questa può essere scritta nella forma seguente

$$y = ax^4 - 4ax^3 + 4ax^2$$

e la derivata:

$$y' = 4ax^3 - 12ax^2 + 8ax$$

Per eliminare anche il parametro a imponiamo la terza condizione fornita dal testo

$$f'(-1) = -4a - 12a - 8a = -1$$

da cui si ricava

$$a = \frac{1}{24}$$

La curva cercata ha perciò equazione

$$y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}$$

Studiamone il grafico.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

non vi sono asintoti di alcun tipo. Le intersezioni con gli assi sono

x	0	2
y	0	0

La funzione può anche essere scritta

$$y = \frac{x^2}{24} (x^2 - 4x + 4)$$

e studiandone il segno si ottiene

$x^2 \geq 0$	+	+	+
$(x-2)^2 \geq 0$	+	+	+
$f(x) \geq 0$	+	+	+

La derivata prima è

$$y' = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$

$$y' = \frac{x}{6} (x^2 - 3x + 2)$$

e, studiandone il segno,

$x \geq 0$	-	0	+	1	+	2	+
$x^2 - 3x + 2 \geq 0$	+	+	+	-	-	+	+
$f'(x) \geq 0$	-	+	+	-	-	+	+

min max min

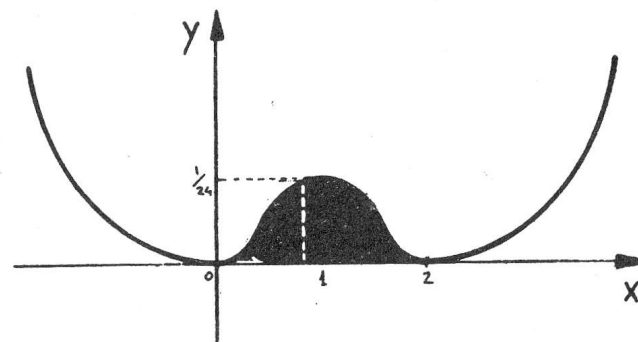
Le ordinate dei punti caratteristici sono

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{24}$$

$$f(2) = 0$$

quindi il grafico concluso è



L'area della regione tratteggiata è

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[\frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{18} \right]_0^2 = \frac{2}{45}$$