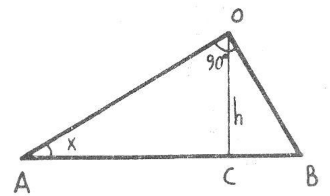
LUGLIO 1971

PRIMO PROBLEMA

E' DATO IL TRIANGOLO AOB, RETTANGOLO IN O, DEL QUALE SIA h L'ALTEZZA RELATIVA ALL'IPOTENUSA. DETTA x L'AMPIEZZA DELL'ANGOLO $O\hat{A}B$, E POSTO $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, SI ESPRIMA PER MEZZO DI h E DI t IL PERIMETRO DEL TRIANGOLO E SI STUDI L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE DI t COSÌ OTTENUTA.



$$O\hat{A}B = x$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Si ha

$$\frac{OC}{AO} = \operatorname{sen} x \longrightarrow AO = \frac{h}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{AO}{AB} = \cos x \longrightarrow AB = \frac{AO}{\cos x} = \frac{h}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\frac{OB}{AO} = \operatorname{tg} x \longrightarrow OB = AO \cdot \operatorname{tg} x = \frac{h}{\cos x}$$

quindi, indicando con y il perimetro del triangolo, si ottiene

$$y = \frac{h}{\operatorname{sen} x} + \frac{h}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{h}{\cos x}$$

$$y = h \, \frac{\cos x + 1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

impiegando le formule dell'arco metà, esprimiamo ora il secondo membro in funzione di $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$y = h \, \frac{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 1 + \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$$

e cioè, applicando la relazione fornita dal testo dell'esercizio,

$$y = h \, \frac{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 + \dfrac{2t}{1 + t^2}}{\dfrac{2t}{1 + t^2} \cdot \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

semplificando si ricava

$$y = h \, \frac{1 + t^2}{t(1 - t)}$$

Studiamo l'andamento di questa funzione. Vi sono due asintoti verticali di equazione

$$t = 0$$

$$t = 1$$

ed un asintoto orizzontale di equazione

$$y = -h$$

Non vi sono intersezioni con gli assi coordinati. Ricordando che per ragioni geometriche deve essere sempre $h > 0$, studiamo il segno della funzione $f(t)$:

		(0)		(1)	
$1 + t^2 \geq 0$	+		+		+
$t \geq 0$	−		+		+
$1 - t \geq 0$	+		+		−
$f(t) \geq 0$	−		+		−

La derivata prima è

$$y' = h\,\frac{t^2+2t-1}{(t-t^2)^2}$$

osservando che il denominatore è sempre positivo per qualsiasi valore di t (si annulla solo per $t=0$ e $t=1$), studiando il segno della derivata prima si ottiene

$f'(t) \geq 0$ + $-1-\sqrt{2}$ − $-1+\sqrt{2}$ +

max min

da cui si può stabilire che si ha un massimo per $x=-1-\sqrt{2}$ ed un minimo per, $x=-1+\sqrt{2}$.

Le coordinate di questi due punti caratteristici sono

$$M \equiv \left(-1-\sqrt{2}\,;\ 2h(1-\sqrt{2})\right)$$

$$N \equiv \left(-1+\sqrt{2}\,;\ 2h(1+\sqrt{2})\right)$$

Il grafico relativo alla funzione è riportato nella pagina seguente. Si tenga però presente che ha significato geometrico solo quel tratto di curva per cui sia contemporaneamente $y>0$ e $t>0$.