Monomi, polinomi ed operazioni ad essi relative

MONOMI: INTRODUZIONE E DEFINIZIONI

Un monomio è una espressione costituita da un coefficiente e una parte letterale dove non compaiono addizioni e sottrazioni. Ad esempio sono monomi 4ab, 5xyz, a.
Ogni monomio è diviso in due parti: una parte numerica, chiamata coefficiente e una parte letterale costituita da lettere (vedi esempi precedenti).
Si dice grado di un monomio la somma algebrica degli esponenti della parte letterale. Ad esempio, $5a^2b^3$ è un monomio di quinto grado: si somma il grado di a che è 2 con il grado di b che è 3.
Si dice grado di un monomio rispetto ad una lettera l'esponente con cui la lettera compare nel monomio.
Nell'esempio precedente:
il grado complessivo è 5
il grado rispetto ad a è 2
il grado rispetto a b è 3
Monomi ridotti in forma normale aventi la stessa parte letterale, con gli stessi esponenti, si dicono monomi simili: sono quelli che hanno uguale parte letterale e con lo stesso esponente.

$4ab^2$	$7ab^2$	$12ab^2$	sono monomi simili
$5x^2y^3z$	$11x^2y^3z$	$7x^2y^3z$	sono monomi simili
$4ab$	$7ab^2$	$12a^2b$	non sono monomi simili

OPERAZIONI CON I MONOMI

Somma algebrica di monomi: la somma di due o più monomi si effettua sommando algebricamente i coefficienti dei soli monomi simili; se i monomi non sono simili non è possibile effettuare nessuna somma.

$$6x^2y + 12\ x^2y - 2x^2y + 7xy = (6+12-2)\ x^2y + 7xy = 16x^2y + 7xy$$

Prodotto tra monomi: il prodotto tra due monomi si ottiene moltiplicando tra di loro i coefficienti e le parti letterali. Si ricorda che il prodotto di due potenze che hanno la stessa base è una potenza con la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$(4x^2y)\ (-5xy^2\ ) = -20x^3y^3$$

Potenza di un monomio: la potenza di un monomio si ottiene elevando a potenza sia il coefficiente che la parte letterale.

$$(4x^2y)^3 = 64x^6y^3$$

Divisione tra monomi: la divisione tra due monomi, di cui il secondo non nullo, si ottiene dividendo tra loro i coefficienti e la parte letterale. Si ricorda che il rapporto di due potenze che hanno la stessa base è una potenza con la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$14x^2y^5 : 3xy^2 = xy^3$$

Massimo comune divisore tra due o più monomi: il M.C.D. tra due o più monomi si ottiene trovando il M.C.D. tra i coefficienti. La parte letterale è il prodotto delle sole lettere comuni, ognuna presa una sola volta con l'esponente più basso. Si ricorda che il M.C.D. tra due o più numeri si ottiene moltiplicando i divisori comuni, presi una sola volta, con l'esponente minimo.

Il M.C.D. tra $4xy;\ 2x^3y^6;\ 2x^2y^3z$ è $2\ xy$

(C) 2012 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

Minimo comune multiplo tra due o più monomi: il m.c.m. tra due o più monomi si ottiene trovando il m.c.m. tra i coefficienti. La parte letterale è il prodotto di tutte le lettere presenti, prese una sola volta, con l'esponente più alto. Si ricorda che il m.c.m. tra due o più numeri è il prodotto tra i divisori comuni e non comuni, presi una sola volta con il massimo esponente.

Il m.c.m. tra $4xy$; $2x^3y^6$; $2x^2y^3z$ è $4x^3y^6z$

POLINOMI: INTRODUZIONE E DEFINIZIONI

Un polinomio è una espressione contenenti costanti e variabili in cui compaiono soltanto somme, differenze e prodotti. Quindi, un polinomio ridotto in forma normale, è la somma algebrica di tanti monomi non simili tra loro, cioè con parti letterali diverse.

Il polinomio $7x^3 +4y^2 +5$ è la somma di tre monomi. Ciascun monomio è chiamato termine del polinomio.
Le costanti sono chiamate coefficienti, nell'esempio precedente essi sono 7 e 4; il 5 viene chiamato termine noto; il coefficiente 1 viene sottinteso.

Un polinomio è **ridotto in forma normale**, quando è stato semplificato, sono stati accorpati i suoi termini simili e sono stati eliminati gli eventuali monomi nulli.
Ad esempio il polinomio $5x +4y -10x -y +8$ ridotto in forma normale diventa $-10x +3y +8$.
Si chiama **binomio**, **trinomio**, quadrinomio... quando è composto da 1, 2, 3, 4... monomi.
È **omogeneo** se è la somma di monomi dello stesso grado.
Ad esempio $2x^3y^3 -4x^2y^4$ è un polinomio omogeneo di grado 6.
Il grado di un polinomio segue le stesse regole viste per i monomi, per esempio il polinomio $2x^4y^2 - 4x^2y$ ha grado sei.

PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI

Se due polinomi nelle stesse variabili, non nulli e in forma ridotta, assumono valori uguali, per tutti i valori attribuiti alle variabili, allora sono identici.
Esempio: i due polinomi $P(x;y) = 5x -2y$ e $Q(x;y) = -2y + 5x$ sono uguali; se a x e y assegniamo un qualsiasi valore, per esempio x=1 e y=2, i due polinomi avranno come risultato
$P(1;2)=5-4=1$ $Q(1;2)=-4+5=1$
$P(-3;7)=-15-21=-36$ $Q(-3;7)=-21-15=-36$
cioè sono identici.

OPERAZIONI CON I POLINOMI

Le operazioni tra due o più polinomi possono essere effettuate utilizzando le proprietà commutative, associative e distributive.
Ad esempio la somma tra il polinomio $2x^2 +y$ e il polinomio $3x^2 +5y$ si scrive
$(2x^2 +y) + (3x^2 +5y) = 2x^2 +y +3x^2 +5y = 5x^2 +6y$
La differenza dei due polinomi $(2x^2 +y) - (3x^2 +5y) = 2x^2 +y -3x^2 -5y = -x^2 -4y$.
Il prodotto di due polinomi:

$$\left(2x^2+y\right)\cdot\left(3x^2+5y\right)=6x^4+10x^2y+3x^2y+5y^2+6x^4+13x^2y+5y^2$$

Divisione di un polinomio per un monomio: un polinomio è divisibile per un monomio (non nullo) se esiste un altro polinomio che, moltiplicato per il monomio, da il polinomio iniziale; quando questo si verifica il quoziente si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.
Per esempio il polinomio $6a^2b +2ab^2$ (dividendo) è divisibile per il monomio $2ab$ (divisore), perché il esiste il binomio $3a +b$ (quoziente) che moltiplicato per il divisore ci riporta al polinomio iniziale.
La divisione tra due polinomi permette di trovare il quoziente, di cui il secondo (divisore) di grado non superiore al grado del primo (dividendo). Cioè, se A(x) è il polinomio dividendo e B(x) quello divisore, deve essere:

(C) 2012 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Dove Q(x) è il quoziente della divisione e R(x) il resto. Naturalmente se il resto è zero si ha la divisione esatta.

REGOLA DI RUFFINI

Quando il polinomio divisore è un binomio del tipo x – a, per effettuare la divisione e quindi trovare il quoziente e il resto, si utilizza la regola di Ruffini.
Per esempio, $(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6):(x - 1)$, si procede con i passi seguenti:
si pongono due linee verticali ed una orizzontale, come nella figura;
si scrivono, poi, i coefficienti del polinomio nella parte alta della costruzione (3, -4, 5), lasciando fuori il termine noto (-6). Se manca una potenza della variabile si mette zero;
si pone in basso a sinistra, fuori della linea verticale, l'opposto del termine noto del divisore (x - 1), cioè +1;
si abbassa il primo coefficiente (3) sotto la linea orizzontale si moltiplica il 3 appena scritto con il numero +1 a sinistra; il risultato è 3;
si pone il 3 sotto il secondo coefficiente (-4) e si esegue la somma algebrica tra - 4 e 3; il risultato è -1;
si moltiplica -1 per il 1 (il numero fuori della linea verticale di sinistra); il risultato è -1;

	3	-4	+5	-6
+1				

	3	-4	+5	-6
+1		+3	-1	+4
	3	-1	+4	-2

si pone questo valore sotto il coefficiente 5 e, come fatto in precedenza, si effettua la somma algebrica tra -1 e 5; il risultato è 4;
si moltiplica, come in precedenza, questo valore per 1 e il risultato, uguale a 4, si pone sotto il temine noto.
si effettua infine l'ultima somma algebrica, tra il termine noto -6 e 4; il risultato è -2.
In conclusione, il termine -2 sarà il resto della divisione, mentre i termini ottenuti sotto la riga orizzontale saranno i coefficienti del quoziente. Tenendo presente che il polinomio risultante deve essere di un grado inferiore a quello dato, si avrà che il risultato della divisione è
$Q(x) = 3x^2 - x + 4$ $\quad R = -2$

TEOREMA DI RUFFINI

Dall'esercizio precedente discende il seguente teorema di Ruffini:
Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio P(x) sia divisibile per un binomio (x-a) è che P(a)=0. Il termine "a" viene detto zero del polinomio.
In pratica questo teorema ci dice che se al posto della x del polinomio, sostituiamo il valore x = a, il polinomio si annulla.

RADICI DI UN POLINOMIO

Una radice, o zero, di un polinomio in una sola variabile è un numero "b" tale che
$P(b) = 0$
cioè tale che, sostituito a x, rende nulla l'espressione. Quindi se
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
il numero b è radice se
$P(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots a_nb^n$

I PRODOTTI NOTEVOLI

I prodotti notevoli permettono di eseguire più rapidamente particolari calcoli. Inoltre, riconoscere un prodotto notevole è utile per scomporre in fattori i polinomi per poterli poi semplificare con altre espressioni.

QUADRATO DI BINOMIO

Il quadrato di un binomio generico si può sviluppare come

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

StudentVille

(C) 2012 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

In generale si può dire quindi che:
il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il doppio prodotto tra il primo e il secondo termine ed il quadrato del secondo termine.

Esempio: $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

QUADRATO DI TRINOMIO

Il quadrato di un trinomio generico

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Cioè il quadrato di un trinomio è la somma dei quadrati dei tre termini, più il doppio prodotto del primo termine per il secondo, doppio prodotto del primo per il terzo e doppio prodotto del secondo per il terzo.

Naturalmente nel calcolo dei prodotti incrociati si deve tener conto del segno dei vari termini, mentre i quadrati sono sempre tutti positivi.

Esempio: $(a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc$

CUBO DI UN BINOMIO

Il cubo di un binomio generico si può sviluppare come

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo e secondo termine, il triplo del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo del quadrato del secondo per il primo.

Esempio: $(3a - 2b)^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$

SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

il prodotto di due monomi per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine, cioè:

$$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Esempio: $(5x - 4y)(5x + 4y) = 25x^2 - 16y^2$

SOMMA E DIFFERENZA DI DUE CUBI

Un binomio formato dalla somma di due termini di terzo grado può essere scritto come:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Un binomio formato dalla differenza di due termini di terzo grado può essere scritto come:

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Esempio: $(27a^3 - 8b^3) = (3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

DIVISIBILITÀ DEI BINOMI NOTEVOLI

Le ultime due identità notevoli si possono leggere anche in un altro modo e cioè che i binomi $a^3 - b^3$ ed $a^3 + b^3$ possono essere divisibili o per la differenza delle basi $(a - b)$, o per la loro somma $(a + b)$

In altre parole, per esempio si può scrivere:

$$(27a^3 - 8b^3) : (a - b) = (a^2 + ab + b^2)$$

SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI IN FATTORI

L'operazione dello scomporre in fattori consiste nello scrivere il polinomio sotto forma di prodotto di polinomi. Quando questo è possibile il polinomio si dice riducibile, altrimenti si dice irriducibile.

Esistono vari metodi per scomporre un polinomio:

(C) 2012 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

Raccoglimento a fattore comune: consiste nel mettere in evidenza un fattore comune a tutti i termini del polinomio.
Esempio: $3x^2y + 6xy^2 + 9xy = 3xy(x + 2y + 3)$
dove il fattore 3xy è comune a tutti e tre i termini del polinomio.
Raccoglimento parziale: consiste nell'applicare due volte il metodo precedente; un esempio chiarirà il procedimento.
Supponiamo di voler scomporre il polinomio $a^2 + ab - a - b$; si nota che vi sono fattori comuni nel primo e terzo termine (la lettera a) e nel secondo e quarto termine (la lettera b), quindi possiamo mettere in evidenza la *a* e la *b* e scrivere: $a(a-1) + b(a-1)$. Si osserva ancora che l'espressione in parentesi è comune ai due termini e quindi si raccoglie ancora una volta il fattore comune, si ha infine $(a-1)(a+b)$.
Scomposizione attraverso i prodotti notevoli: consiste nel saper riconoscere nel polinomio delle identità notevoli, viste in precedenza.
Esempi: $16a^2 - 25b^2 = (4a - 5b)(4a + 5b)$
$36a^2 - 12a + 1 = (6a - 1)^2$
Scomposizione con il metodo di somma e prodotto: consiste nello scomporre un particolare trinomio di secondo grado, in cui il coefficiente di x^2 è uguale a 1 e i coefficienti della x e il termine noto sono combinazione, rispettivamente, di due numeri la cui somma è uguale al coefficiente della x e il cui prodotto è uguale al termine noto. In questo caso in generale la scomposizione si ottiene nel modo seguente:
$x^2 + Sx + P = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
Esempio: $x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$
infatti $s = 8 = 5 + 3$ $p = 15 = 3x5$

Scomposizione mediante la regola di Ruffini: consiste, come già visto, nel dividere il polinomio per $x - a$, se il resto è zero, cioè se $P(a) = 0$, allora il polinomio diventa $P(x)=Q(x)(x - a)$. Per trovare gli zeri, basta trovare i divisori del termine noto e verificare per quale di questi valori si annulla il polinomio.

Esempio: verificare per quale valore si annulla il polinomio
$5x^3 - 8x + 3$;
i divisori di 3 sono 1, 2, 3 e -1, -2, -3 sostituendo a x il valore 1, otteniamo $5 - 8 + 3 = 0$
quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$ e la scomposizione diventa, applicando la regola di Ruffini, la seguente
$5x^3 - 8x + 3 = (5x^2 + 5x - 3)(x - 1)$.

M.C.D. e m.c.m. fra polinomi. Le definizioni e le regole relative al M.C.M. e il m.c.m. fra due o più polinomi sono uguali a quelle adottate per i monomi.
Il M.C.M. tra più polinomi si trova scomponendo ognuno dei polinomi in fattori primi, quindi si moltiplicano tra di loro i fattori comuni con l'esponente minore, presi una sola volta.
Il m.c.m. fra più polinomi si trova scomponendo ognuno dei polinomi in fattori primi, quindi si moltiplicano tra di loro i fattori comuni e non comuni, con l'esponente maggiore, presi una sola volta.

Esempi: Trovare il M.C.M. e il m.c.m tra i seguenti polinomi:
$2a(x - 1)(x + 1)$
$6a(x + 1)^3$
il M.C.M è $2a(x + 1)$ il m.c.m. è $6a(x - 1)(x + 1)^3$

(C) 2012 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata