Proporzioni fra grandezze. proporzionalità diretta e inversa. Teorema di Talete e sue conseguenze

PROPORZIONI TRA GRANDEZZE

Date quattro grandezze A, B, C, D, in cui A e B sono omogenee tra di loro, C e D omogenee tra di loro, se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra le seconde due, si dice che esse sono in **proporzione** e si scrive:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad \text{oppure} \qquad A : B = C : D$$

L'uguaglianza precedente si legge: "A **sta** a B **come** C **sta** a D".
Le lettere A e D si dicono termini **estremi** della proporzione, mentre le lettere centrali, B e C, si dicono termini **medi** della proporzione; la prima grandezza di ogni rapporto si chiama antecedente, la seconda conseguente, nel nostro caso A e C sono gli antecedenti, B e D i conseguenti.
Se i termini medi sono uguali, la proporzione diventa: A : B = B : D la proporzione si dice continua ed il termine uguale si chiama medio proporzionale.
Sussiste il seguente **teorema fondamentale** sulle proporzioni tra grandezze: **quattro grandezze, a due a due omogenee, formano una proporzione quando il loro rapporto è una costante**.
Dalla definizione di proporzione seguono importanti proprietà, che qui si elencano:

- **In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**
- **Proprietà dell'invertire**: in una proporzione gli antecedenti si possono scambiare con i conseguenti, cioè se A:B=C:D allora vale anche che B:A=D:C.
- **Proprietà del comporre**: in ogni proporzione ad ogni antecedente si può aggiungere il proprio conseguente, cioè: (A+B):B=(C+D):D.
- **Proprietà dello scomporre**: in una proporzione, in cui ogni antecedente è maggiore del rispettivo conseguente, ad ogni antecedente si può sottrarre il proprio conseguente, cioè: (A-B):B=(C-D):D.
- **Proprietà del permutare**: in una proporzione, con le grandezze tutte omogenee, si possono scambiare tra di loro i medi o gli estremi, cioè A:C=B:D oppure D:B=C:A

Dalla prima proprietà discende che, note tre grandezze, si può calcolare facilmente la quarta. Se per esempio l'incognita è un estremo, per determinarlo si moltiplicano tra di loro i medi e si divide per l'altro estremo; se l'incognita è un medio, si moltiplicano tra di loro gli estremi e si divide per l'altro medio.

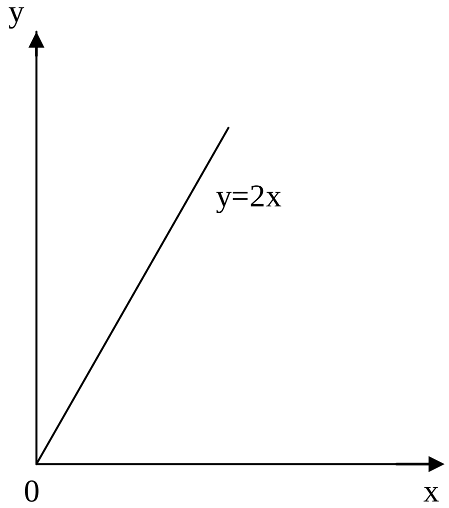
Esempio: $x : 5 = 40 : 10 \rightarrow x = \frac{5}{10} \cdot 40 = 20; \qquad 20 : x = 40 : 10 \rightarrow x = \frac{20}{40} \cdot 10 = 5.$

PROPORZIONALITÀ DIRETTA E INVERSA

Due grandezze variabili, x e y si dicono proporzionali tra di loro, o **direttamente proporzionali**, se vale la seguente uguaglianza: $\mathbf{y = kx}$, ovvero $k = y/x$ dove k è una costante numerica non nulla, chiamata costante di proporzionalità.
In altre parole due grandezze sono in proporzione se all'aumentare di una aumenta anche l'altra, secondo un fattore costante.
Esempio di proporzionalità diretta è la relazione che lega lo spazio e il tempo nel moto rettilineo uniforme. In questo caso vale la relazione: $s=v\cdot t$, dove s è lo spazio percorso nel tempo t; la costante di proporzionalità è la velocità "v". Facciamo un esempio concreto: una persona percorre 10 metri in 5 secondi; in 10 secondi saranno percorsi 20 metri, in 15 secondi, 30 metri e così via. Il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato percorrerlo è sempre costante, cioè:

$\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{30}{15}$ = 2 m/s quindi, in questo caso la costante di proporzionalità è 2.

La proporzionalità diretta si può rappresentare su un diagramma cartesiano come una retta:

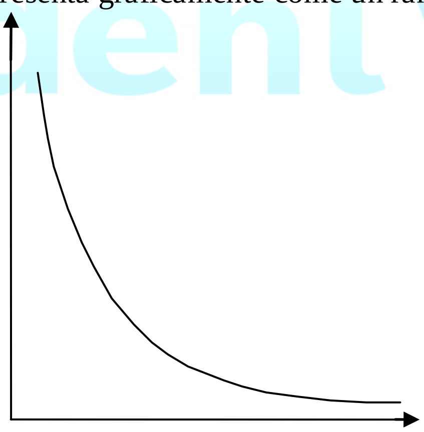


Due grandezze variabili, x e y si dicono **inversamente proporzionali** se vale la seguente uguaglianza: **xy = k**, ovvero y = k/x, dove k è una costante non nulla, chiamata costante di proporzionalità inversa.

In altre parole due grandezze sono inversamente proporzionali quando all'aumentare di una diminuisce l'altra e viceversa. Per esempio se x raddoppia, y si dimezza, ecc.

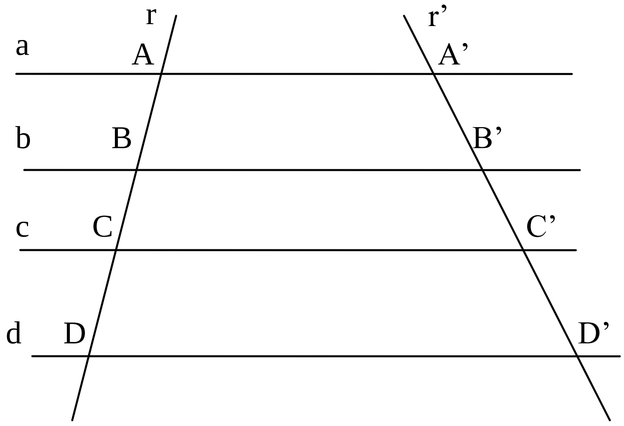
In una proporzione la proporzionalità inversa si scrive: A:B=D:C.

La proporzionalità inversa si rappresenta graficamente come un ramo di iperbole.



TEOREMA DI TALETE

Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali individuano due classi di segmenti corrispondenti direttamente proporzionali.



Siano a, b, c, e, d rette parallele tra di loro e tagliate dalla due rette trasversali r e r' nei punti rispettivamente A, B, C, D e A', B', C', D', (vedi figura) il teorema ci dice che:

- il rapporto tra i segmenti omologhi dell'una e dell'altra retta è costante, cioè si ha che:

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

- se presi AC e A'C', somma di segmenti omologhi, si ha tra di loro lo stesso rapporto di AB con A'B' e di BC con B'C', cioè:

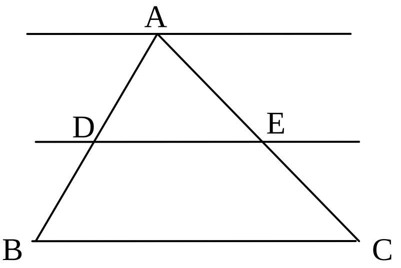
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'}$$

Naturalmente le relazioni precedenti valgono qualsiasi siano le coppie di segmenti omologhi.

Dal teorema di Talete si ha il seguente corollario:

Corollario al Teorema di Talete

Una retta parallela ad un lato di un triangolo determina sugli altri due lati, o sul loro prolungamento, segmenti pro-porzionali.



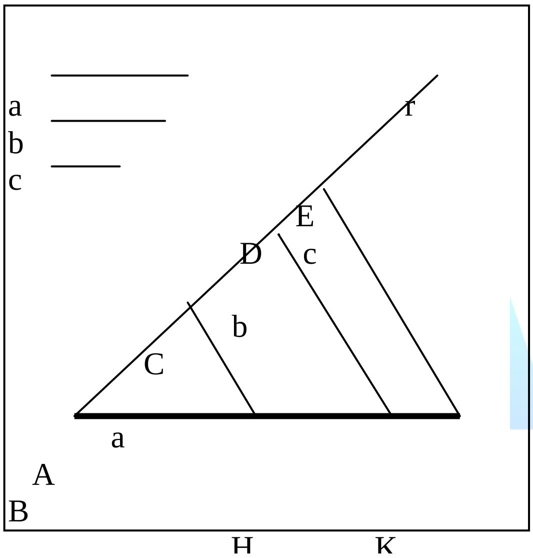
In riferimento alla figura, quindi si ha che: AB:AC=AD:AE=DB:EC

Vale altresì il teorema inverso al precedente corollario: una retta che determina su due lati di un triangolo, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

Conseguenze del teorema di Talete

Il teorema di Talete ci consente di suddividere un segmento in parti direttamente proporzionali a più segmenti dati. Sia AB il segmento da dividere e siano a, b, c i segmenti assegnati. Per risolvere il problema si procede nel modo seguente: si traccia, a partire da A, una semiretta r; su quest'ultima si staccano i segmenti a,b,c dati (vedi figura), ottenendo i segmenti AC, CD, DE. L'ultimo punto E si unisce con il punto B e infine dai punti D e C si riportano le parallele a EB. I punti di intersezione delle parallele con il segmento AB, che chiameremo H e K risolvono il problema posto, infatti per il teorema di Talete di avrà che:

AH : a = HK : b = KB: c

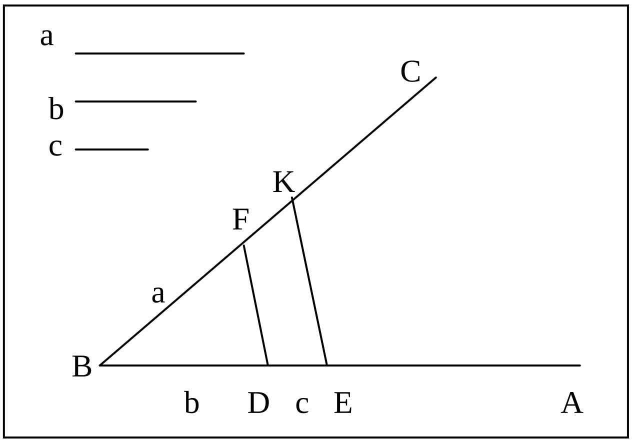


Un'estensione del problema precedente è quello di dividere un segmento in parti proporzionali a più numeri dati. In questo caso si sostituiscono ai numeri dati segmenti ad essi proporzionali e poi si può operare come sopra.

Se i numeri sono uguali, allora il problema è quello di dividere un segmento in tante parti uguali. In questo caso basta prendere al posto dei segmenti a, b, c, tanti segmenti uguali a quante sono le parti da dividere.

L'ultimo problema è quello di determinare il segmento quarto proporzionale, dati tre segmenti assegnati a, b, c. Si procede nel modo seguente: si traccia un angolo ABC e sul lato AB si riportano i segmenti b e c ottenendo i segmenti BD e DE. Sul lato BC, invece, si riporta l'altro segmento dato a, ottenendo il segmento BF. Si unisce F con D e da E si conduce la parallela a FD che incontra BC in K. Il segmento FK è il quarto proporzionale cercato. Infatti, per il teorema di Talete si ha:

BD : DE = BF : FK e cioè b : c = a : FK.


a
b
c
C
K
F
a
B
b
D
c
E
A