Scomposizione in fattori di polinomi. operazioni con le frazioni algebriche

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DI POLINOMI

La scomposizione in fattori dei polinomi consiste nel trovare altri polinomi, di grado minore, in modo tale che il prodotto di questi ultimi dia il polinomio iniziale. L'utilità di questa operazione è evidente: se un polinomio è indicato sotto forma di fattori sarà più semplice semplificarli con altri fattori, nel caso di operazioni con le frazioni algebriche.
Nel caso un polinomio non si possa ridurre in fattori si dice che esso è irriducibile.
I metodi di fattorizzazione sono i seguenti:

- Raccoglimento a fattore comune o messa in evidenza
- Doppio raccoglimento a fattore comune o doppia messa in evidenza
- Riconoscimento di identità notevoli
- Trinomio di 2° grado
- Scomposizione per divisione

RACCOGLIMENTO A FATTORE COMUNE O MESSA IN EVIDENZA: consiste nel mettere in evidenza gli elementi comuni ai vari termini del polinomio, in pratica si tratta di trovare il Massimo Comune Divisore (M.C.D.) . Gli esempi che seguono chiariranno meglio il procedimento.
Esempio: $5a^3b^2 + 15ab - 10a^2b$.
Il termine comune ai tre monomi è 5ab, per cui si potrà scrivere il polinomio dato come prodotto tra il monomio 5ab per il polinomio quoziente, cioè

$$5ab\,(a^2b + 3 - 2a)$$

Esempio: $6(a+b) + (a+b)^2 + (a+b)(a-b)$
In questo caso il fattore comune è il binomio (a+b) e quindi si ha:

$$(a+b)\,[6 + (a+b) + (a-b)]$$

In questo caso il polinomio in parentesi può essere, a sua volta, semplificato sommando i termini simili, si ha:
$(a+b)(6 + a + b + a - b) = (a+b)(6+2a)$.
Come si può notare il polinomio assegnato, alla fine delle operazioni, risulta notevolmente semplificato.

DOPPIO RACCOGLIMENTO A FATTORE COMUNE O DOPPIA MESSA IN EVIDENZA: consiste nell'applicare due volte il metodo precedente.
Esempio: $5ax+10bx+3ay+6by$.
Il monomio in comune al primo e secondo termine è 5x, mentre il monomio in comune al terzo e quarto termine è 3y. Raccogliendo i monomi comuni precedenti, si ha: $5x(a+2b)+3y(a+2b)$.
A questo punto si può raccogliere il binomio comune (a+2b) e si ha:

$$(a+2b)(5x+3y)$$

Esempio: $12x^3-3xy-6x^2y+6x^2$
In questo caso si possono evidenziare i monomi comuni del primo e terzo termine ($6x^2$) e quelli tra il secondo e quarto termine (3x). Si ottiene:

$$6x^2(2x-y)+3x(2x-y)$$

da cui infine raccogliendo ancora il termine comune, si ha:

$$(2x-y)(6x^2+3x)$$

RICONOSCIMENTO DI IDENTITÀ NOTEVOLI: consiste nel saper riconoscere, in un polinomio, le identità notevoli viste già in un'altra sezione di questo corso.

- $x^2 + 2xy + y^2$ si riconosce essere il quadrato di un binomio, per cui si può mettere sotto la forma $(x+y)^2$.
- $2a^2+8ab+8b^2$ in apparenza non è un prodotto notevole, ma raccogliendo a fattor comune il numero 2 si ha $2(a^2+4ab+4b^2)$, si riconosce in parentesi ancora un quadrato di un binomio e precisamente: $2(a+2b)^2$.
- $4x^2y^2-25$ si può trasformare, ricordando la regola della differenza di quadrati, in $(2xy–5)(2xy+5)$.
- $1 – a^3$ diventa $(1-a)(1+a +a^2)$, ricordando la regola della differenza tra due cubi.

TRINOMIO DI 2° GRADO: consiste nel riconoscere che nel trinomio x^2+sx+p, il coefficiente S della x è la somma di due numeri interi a e b, mentre il termine noto è il prodotto degli stessi due numeri, in altre parole deve essere $s = a + b$ e $p = ab$. In questo caso il trinomio dato si può scrivere come prodotto, nel modo seguente:

$$x^2+sx+p = (x+a)(x+b).$$

- $x^2+2x-15$. Bisogna trovare due numeri la cui somma dia 2 e il cui prodotto dia -15. I due numeri sono -3 e +5, infatti -3+5=2 e (-3)(5)=-15; quindi il trinomio precedente si trasforma in $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$.
- $x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$, infatti bisogna cerca due numeri la cui somma è +5 e il cui prodotto è +8; questi numeri sono +2 e +4.

SCOMPOSIZIONE PER DIVISIONE: consiste nel dividere il polinomio dato per il binomio x – a, dove *a* è il valore che lo annulla. In questo caso il polinomio si potrà riscrivere come prodotto tra il quoziente ottenuto, adoperando la regola di Ruffini (già vista in un'altra sezione) e il binomio stesso.
Per trovare gli eventuali valori di a che annullano il polinomio bisognerà cercarli nei divisori del suo termine noto, o, se questo manca, del coefficiente del termine con grado minimo).

- $2x^4+x^3-3x^2+4x-4$. I valori che annullano questo polinomio vanno cercati tra quelli dei divisori del termine noto, cioè - 4. Essi sono ± 1; ± 2; ± 4. Sostituendo uno alla volta questi valori alla x del polinomio, troviamo che esso si annulla per x = 1.

Applicando la regola di Ruffini si ha

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & & 2 & 3 & 0 & 4 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Per cui il quoziente della divisione sarà: $2x^3+3x^2+4$ e il polinomio dato si potrà scrivere sotto forma di prodotto nel modo seguente:

$2x^4 +x^3-3x^2+4x -4 = (2x^3+3x^2+4)(x – 1)$.

Notiamo, a questo punto, che il trinomio quoziente risultante è di terzo grado, quindi si può provare a fattorizzarlo ulteriormente, sempre con questo metodo. I divisori vanno cercati, al solito, tra quelli del termine noto -4e cioè, ancora una volta tra: ± 1; ± 2; ± 4.
Esso è -2, infatti $2(-2)^3+3(-2)^2+4 = 0$. Applicando ancora la regola di Ruffini avremo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & & -4 & 2 & -4 \end{array}$$

2	-1	2	0

Il trinomio fattorizzato sarà: $(2x^2-x+2)(x + 2)$. Infine, tenendo conto anche della fattorizzazione precedente, avremo:

$2x^4+x^3-3x^2+4x-4 = (2x^3+3x^2+4)(x -1)=(2x^2-x+2)(x +2)(x -1)$