Sistemi di equazioni di 1° e 2° grado. Applicazione a problemi di 1° e 2° grado

GENERALITÀ DEI SISTEMI

Un'equazione di 1° grado a due incognite è impossibile da risolvere. Per trovare il valore delle due incognite abbiamo bisogno di due equazioni nelle stesse due incognite. La soluzione sarà è la coppia di valori che verifica simultaneamente le due equazioni.
Il problema posto si risolve, quindi, con un sistema di equazioni o, più semplicemente con un **sistema**. Per esprimere i concetti precedenti in modo sintetico le due equazioni, a due incognite vengono raccolte attraverso una parentesi graffa nel modo seguente:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Risolvere un sistema significa determinare il valore delle due incognite, x e y che verificano entrambe le equazioni; in questo caso il sistema si dice determinato. Se le soluzioni sono infinite si dice che esso è **indeterminato**, se non ammette nessuna soluzione si dice **impossibile**.
Si definisce grado di un sistema il prodotto dei gradi delle sue equazioni.

SISTEMI DI EQUAZIONI DI 1° GRADO. I sistemi di equazioni di 1° grado si possono risolvere con quattro metodi:

1. Metodo di sostituzione
2. Metodo di confronto
3. Metodo di addizione e sottrazione (o riduzione)
4. Metodo di Cramer

Metodo di sostituzione: consiste nel risolvere una delle due equazioni in funzione di un'incognita per poi sostituirla nell'altra. In questo modo la nuova equazione avrà una sola incognita e sarà facile determinarla. Una volta trovata un'incognita basterà sostituirla nella prima equazione e il sistema è risolto.
Per esempio risolviamo il sistema precedente, procedendo per passi.

1. Si trova la x nella prima equazione: x = 7 – y
2. Si sostituisce x = 7 – y nella seconda equazione: (7–y)–y=3, ottenendo un'equazione ad una sola incognita
3. si risolve l'equazione: (7–y)–y=3 → -y-y=3–7 → -2y=-4 → y=2
4. si sostituisce y = 2 in x = 7 – y ottenendo y = 7 – 2 = 5.

Metodo di confronto: consiste nel risolvere le due equazioni nella stessa incognita e confrontare, poi, i secondi membri tra di loro.
Risolviamo la stessa equazione precedente con questo metodo; si eseguono le seguenti operazioni:

1. Si trova l'incognita x nella prima equazione: x = 7 – y
2. Si trova la stessa incognita x nella seconda equazione: x=3+y
3. Si confrontano i secondi membri: 7–y=3+y ottenendo un'equazione con una sola incognita, la y
4. Si risolve l'equazione - y - y = 3 – 7 → -2y = - 4 → y = 2
5. Si sostituisce y = 2 in una qualunque delle due equazioni in x: x =3 + 2 = 5

Metodo di addizione e sottrazione: consiste nel sommare (sottrarre) membro a membro i monomi delle equazioni contenenti le x e le y in modo da poter eliminare una delle incognite, per poi risolvere la rimanente che a questo punto è di una sola incognita.

Sempre in riferimento all'equazione iniziale, troviamo le soluzioni con questo metodo.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$2x \quad =10$$

Da questa equazione si ricava la x = 10/2 = 5
Si sostituisce la x trovata in una delle equazioni, (per esempio la prima) e si trova y = 2
Metodo di Cramer: consiste nel determinare le incognite come rapporto tra due "determinanti".
Il determinante, indicato con Δ è un simbolo costituito da quattro termini posti nel modo convenzionale seguente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Nel nostro caso, sempre volendo risolvere il sistema iniziale. si procede come segue:

1. Si costruisce il determinante del sistema ponendo nella prima colonna i coefficienti della x e nella seconda colonna i coefficienti della y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$$

2. Si costruisce il determinante di x, ponendo i termini noti nella prima colonna del determinante, mentre nella seconda colonna si inseriscono i coefficienti dell'altra incognita y, cioè:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

Il valore della incognita x sarà uguale al rapporto tra i due determinanti: cioè x = Δx/Δ = -10/-2 = 5.

3. Per determinare y, invece, il determinante del numeratore seguirà una regola analoga alla precedente e cioè che la prima colonna sarà formata dai coefficienti della x, mentre la seconda colonna dai termini noti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = -4$$

Il valore dell'incognita y sarà uguale al rapporto tra il determinante della y e il determinante del sistema che è – 2:

y = Δy/Δ = - 4/- 2 = 2.

Sistemi di 2° grado

Un sistema è di 2° grado quando il prodotto dei gradi delle sue equazioni è 2. Nel caso di due equazioni in due incognite un sistema di 2° grado è costituito da un'equazione di 2° grado e da una di 1° grado.
Il metodo più comune per risolvere questo tipo di sistema è quello di sostituzione. Si trova una incognita nell'equazione di 1°, per esempio la y, e la si sostituisce in quella di 2° grado. Otteniamo un'equazione di 2° grado in x, riconducibile alla forma canonica $ax^2 + bx + c = 0$.

Come è noto questa equazione si risolve con la formula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dove il termine sotto la radice quadrata $\Delta = b^2 - 4ac$ è chiamato discriminante. Si ricorda che si possono avere tre casi:

1. Δ > 0 → si avranno 2 soluzioni, o radici, x_1, x_2 reali e distinte;
2. Δ = 0 → si avranno due soluzioni $x_1 = x_2$ reali e coincidenti;

3. $\Delta < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione.

Naturalmente, una volta trovate le soluzioni in x, queste vanno sostituite nell'equazione di 1° grado, dove si troveranno le due soluzioni nell'incognita y.
Esempio:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - y^2 - 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

dalla prima equazione si ha x = 2y; si sostituisce questo valore nella x della seconda equazione, ottenendo:
$(2y)^2 - y^2 - 3y - 18 = 0 \rightarrow 4y^2 - y^2 - 3y - 18 = 0 \rightarrow 3y^2 - 3y - 18 = 0$ da cui, applicando la formula risolutiva, si ha:

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{3 \pm 15}{6}$$ da cui $y_1 = 3$ e $y_2 = -2$

sostituendo in x, avremo $x_1 = 2y_1 = 2 \cdot 3 = 6$ e $x_2 = 2y_2 = 2 \cdot (-2) = 4$.

APPLICAZIONE A PROBLEMI DI 1° GRADO. Risolviamo alcuni problemi tipici applicando la teoria sui sistemi.
Problema. Se ad 1/4 di un numero si aggiunge un altro numero, si ottiene 8. Trovare i due numeri sapendo che la differenza tra i due numeri è 2.
Si procede nel modo seguente: siano x e y i due numeri da trovare. Il problema si può tradurre in due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Nella prima equazione facciamo il minimo comune multiplo

$$\begin{cases} x + 4y = 32 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, avremo:
/ +5 y = 30
Da cui y=6; sostituendo nella seconda equazione, sarà: x –6=2 → x=8.
I due numeri cercati sono 8 e 6.

APPLICAZIONE A PROBLEMI DI 2° GRADO
Trovare due numeri positivi sapendo che il loro prodotto è 88 e che inseriti al numeratore e al denominatore di una frazione, quest'ultima diviene uguale a 1 se si aumenta di 1 il numeratore e si diminuisce di 2 il denominatore.
Chiamando x e y i due numeri, si può impostare il problema nel modo seguente:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{y+2} = 1 \\ xy = 88 \end{cases}$$

che risolto dà le soluzioni $x_1 = 8$ e $x_2 = -11$ (da scartare perché si cercano numeri positivi) e $y_1 = 11$, per cui il rapporto cercato è 8/11.