LICEO SCIENTIFICO STATALE
"Luigi Magrini"
Gemona del Friuli

"Datemi un punto e spiegherò il mondo"
Approcci antichi e moderni a principi geometrici e tecniche dimostrative

Candidato
Celotti Daniel Marco
5^A
A. S. 2006-2007

INTRODUZIONE

La geometria, e più in generale la matematica, durante il corso della storia, ha subito notevoli trasformazioni: il contenuto si ampliava sempre di più, mentre venivano modificati gli approcci e la logica con cui venivano condotte le dimostrazioni. La geometria in particolare subì una grandissima trasformazione a metà del XIX secolo, quando quella euclidea fu rivisitata e modificata.
Ho scelto 3 opere fondamentali, gli “Elementi” di Euclide, le “Sferiche” di Menelao e i “Fondamenti della geometria” di David Hilbert, per successivamente analizzarli alla ricerca di analogie e differenze tra il pensiero antico e quello moderno; ho preso in considerazione anche il dibattito nato tra Frege e Russell e tutto il movimento logicista.
Da questa mia analisi sono nate due osservazioni; la prima riguarda in modo specifico la geometria come disciplina, mentre la seconda porta ad una riflessione di carattere più generale.
Si può notare infatti che strutturalmente le tre opere hanno molte cose in comune, poiché presentano la medesima impostazione: partendo da pochi elementi dati per certi (definizioni, postulati, assiomi), il resto della teoria veniva costruito come consequenza logica, per mezzo di dimostrazioni. I tre libri presentano però anche una profonda diversità, poiché l’approccio dimostrativo si è rilevato nei tre autori molto diverso, come mostrerò in seguito con qualche esempio.
L’altra osservazione, che nasce dalla lettura delle opere scelte e dal dibattito che si è venuto a creare alla fine del XIX secolo, è uno spostamento dell’attenzione degli studiosi moderni. Questi non si concentrano più sulla legittimità dei procedimenti deduttivi, come vediamo mettendo a confronto matematici antichi come Euclide e Menelao, ma pongono in discussione il ruolo degli enti che vengono sottoposti ai procedimenti, analizzando le maniere con cui possono essere messi in relazione l'uno con l'altro e non la loro semplice essenza e manifestazione concreta come invece facevano gli antichi.

INDICE

L'APPROCCIO DIMOSTRATIVO

Come già accennato, nelle tre opere strettamente geometriche citate precedentemente, si nota un diverso approccio riguardo al metodo dimostrativo scelto. Possiamo dividere questi 3 autori in 2 gruppi: antichi e moderni.

Antichi

Euclide visse nel corso del terzo secolo avanti Cristo, mentre Menelao visse probabilmente nel primo secolo dopo Cristo. Gli "Elementi" di Euclide gettano le fondamenta della geometria piana e solida, e questa raccolta di teoremi, divisa in 13 libri, ci è pervenuta integralmente nell'originale greco. Le "Sferiche" di Menelao ci sono pervenute sotto forma di piccoli frammenti all'interno di altre opere di autori greci, mentre ci è arrivata una integrale, o quasi, traduzione araba. È da considerarsi legittimo studiare quest'opera di Menelao utilizzando la traduzione, anche se occorre fare attenzione: la terminologia usata non può ovviamente essere la stessa di Menelao; in più i traduttori arabi di quest'opera non hanno attuato una semplice traduzione metodica, ma come hanno fatto per molte opere, effettuarono una rielaborazione.

Euclide apre il primo libro della sua opera, che è quello preso in considerazione, con delle definizioni degli enti che andrà successivamente ad utilizzare nelle dimostrazioni dei teoremi; prosegue poi con alcuni assiomi, i cosiddetti "postulati", di carattere prettamente geometrico (non dimostrati poiché appunto presi per "veri a priori"); infine prima di cimentarsi nelle dimostrazioni del suo primo libro, esplicita quelle che lui definisce nozioni comuni, anch'essi assiomi, ma di carattere generale, e applicabili a tutte le discipline matematiche.

Menelao presenta solamente tre definizioni per aprire l'opera, poiché parte dal bisogno pratico di descrivere una geometria sferica da poter applicare all'astronomia e non va oltre ai pochi elementi in più rispetto a quelli già dati da Euclide (bisogna ricordare che la sfera è un particolare solido geometrico, e quindi valgono ancora tutte le definizioni ed ipotesi della geometria di Euclide).

Le vere differenze tra le due opere si scoprono se guardiamo alle tecniche dimostrative che usano gli autori.

È noto che nell'antichità un grande dibattito fu incentrato sulle tecniche dimostrative: il primo a teorizzarle fu Aristotele definendo il sillogismo e i suoi metodi dimostrativi, per deduzione, per induzione, per abduzione, per assurdo e per analogia. Euclide utilizza soltanto il primo metodo e quello per assurdo. Menelao addirittura si prefigge di non utilizzare le dimostrazioni per assurdo (lo dice esplicitamente nella prefazione a quest'opera). Questa diversità porta Menelao, che dimostra alcuni teoremi del tutto analoghi a quelli di Euclide, a ordinare alcuni dei teoremi iniziali della sua opera in modo profondamente diverso. Entrambi infatti costruiscono le dimostrazioni e le proposizioni in modo conseguente, poiché una dimostrazione fa riferimento agli elementi precedentemente dimostrati, e la prima fa riferimento, per esempio, soltanto alle definizioni, agli assiomi e alle nozioni comuni. Si può costruire una tabella che riporti le dimostrazioni corrispondenti tra le due opere (i numeri sono quelli dell'ordine in cui appaiono nel primo libro di ognuna delle opere; Euclide dimostra per assurdo i teoremi 4, 6, 8, 19, 25, 26; quest'ultimo è diviso in due parti, che ho chiamato 26a e 26b):

Sferiche	*I 1*	*I 2*	*I 3*	*I 4*	*I 5*	*I 6*	*I 7*	*I 8*	*I 9*	*I 10*	*I 11*	*I 14-15*	*I 17*
Elementi	*I 23*	*I 5*	*I 6*	*I 4,8*	*I 20*	*I 21*	*I 19*	*I 24,25*	*I 18*	*I 16*	*I 32*	*I 26a*	*I 26b*

Poiché Menelao non vuole usare dimostrazioni per assurdo, è costretto a cambiare l'ordine delle proposizioni.

Moderni

Uno degli esponenti maggiori della geometria moderna può essere identificato in David Hilbert (1862-1943). La sua opera fondamentale è "Fondamenti di Geometria", che incarna anche quel desiderio da parte dei matematici a lui contemporanei di ridurre al minimo i principi fondamentali usati per costruire la geometria, in modo da portare ad una visione e ad una lettura il più generale

ed astratta, cioè formale, possibile. A differenza di Euclide e Menelao, Hilbert non definisce gli enti iniziali, che per lui restano dei semplici nomi di oggetti non specificati in alcun modo, mentre procede a descrivere con molto dettaglio tutte le relazioni che intercorrono tra gli enti iniziali, relazioni tipicamente geometriche come *"giacere", "fra", "congruente"*. Hilbert non prende per "evidentemente vero" nulla, e scrive molti più assiomi di quelli che troviamo negli "Elementi". I metodi dimostrativi sono tutti leciti per Hilbert, purché siano logicamente coerenti e "formalizzabili". Per questo ci sono delle differenze rispetto a certe dimostrazioni degli "Elementi". Per esempio, Euclide dimostra il primo criterio di congruenza dei triangoli facendo uso della sovrapposizione, metodo messo in dubbio per la legittimità logica; Hilbert invece dimostra tutti i criteri di congruenza con procedimenti logici, senza ricorrere alla sovrapposizione. Queste sue dimostrazioni però sono conseguenze immediate degli assiomi, e risultano quindi delle specie di assiomi travestiti. Seguendo l'impostazione di Hilbert, Russell critica Euclide, che avrebbe dovuto prendere la I,4 (appunto il primo criterio di congruenza dei triangoli) come assioma "*as is practically done by Hilbert* (come ha fatto **praticamente** Hilbert)".
Oltre a questo fatto, in quest'opera possiamo anche vedere il diverso percorso intrapreso dall'autore, con alcune corrispondenze con le due opere dei matematici greci, ma in diversa posizione, poiché ciò che risulta fondamentale per Hilbert non lo è per Euclide e Menelao. (T si riferisce ai Teoremi di Hilbert, P 4 è il quarto postulato di Euclide).

Hilbert	*T 11*	*T 12*	*T 13*	*T 18*	*T 21*	*T 22*	*T 23*	*T 24*	*T 26*
Euclide	*I 5*	*I 4*	*I 6*	*I 8*	*P 4*	*I 16*	*I 18*	*I 5*	*I 10*

GLI “ENTI”

Nel primo libro degli “Elementi”, Euclide ha voluto dare la definizione di tutti gli oggetti presenti nella geometria piana, mentre ha dato assiomi solo per alcune delle relazioni che intercorrono tra essi. Nella prima parte, dove l’autore definisce gli enti, li esplicita “concretamente”, poiché l’obiettivo si focalizzava sul bisogno reale di una geometria da essere applicata. Euclide aveva una conoscenza intuitiva immediata degli oggetti geometrici su cui stava operando; non si poneva quindi alcun problema riguardo alla natura delle basi e dei fondamenti su cui andava a definire i teoremi. Proprio da questa osservazione possiamo continuare l’analisi dei libri degli “Elementi”, delle “Sferiche e dei “Fondamenti della geometria”, esponendo anche il dibattito tra Frege e Russell e il loro progetto logicista. Anche in questo caso si possono distinguere due periodi: antico e moderno.

Antichi
Euclide e Menelao prendono entrambi come punto di partenza delle realtà che consideravano evidentemente oggettive e reali, o almeno realmente concepibili. Semplificando molto potremmo dire che entrambi si mettono davanti al piano euclideo, l’uno limitandosi agli oggetti più semplici, l’altro, Menelao, soffermandosi sulla figura della sfera, poiché utile agli studi astronomici. L’attenzione degli antichi non viene quindi rivolta verso la natura degli oggetti, poiché per loro sono naturalmente esistenti. Il dibattito avviene invece intorno al metodo di dimostrazione, come fatto vedere prima, e ciò che era dimostrabile era “vero”. La difficoltà nel costruire l’opera era nella scelta del giusto metodo da applicare alle dimostrazioni, e il fatto che per sfida Menelao si sia posto di non usare le dimostrazioni per assurdo dimostra che ai suoi tempi il dibattito era ancora vivo.

Moderni
Una diversa attenzione viene invece posta dai matematici moderni riguardo agli enti su cui si basano le relazioni e i teoremi. La tendenza del XIX secolo era quella di ridurre al minimo gli elementi fondamentali a tutte le discipline matematiche. È questo per esempio l’obiettivo del progetto logicista, ricondurre cioè tutta la matematica a pochi semplici enti iniziali, un po' come lo erano le definizioni iniziali di Euclide. Gottlob Frege (1848-1925) pensò di ricondurre tutto alla teoria degli insiemi che era una parte della logica. Questa prima riforma delle discipline matematiche però non riuscirà ad avere un completo successo: Bertrand Russel (1872-1970) trovò che il sistema proposto da Frege portava a contraddizioni. Russell tentò di fare fronte al paradosso enunciando la sua “teoria dei tipi”, che però non è priva di problemi e di complicazione enorme. Si nota quindi come i modi per dimostrare o per arrivare a nuove proposizioni più semplici non siano messi in dubbio e presi per validi, e sono appunto quei metodi che Aristotele aveva definito e Euclide e Menelao hanno usato. L’attenzione è quindi rivolta verso i soggetti e gli enti, che vengono sempre più semplificati.
Questo spostamento dell’attenzione si vede in modo ancora più marcato se si analizza l’opera di David Hilbert già citata in precedenza. Gli enti sono infatti definiti solo tramite gli assiomi che definiscono le relazioni che legano gli enti stessi, in modo quindi che qualsiasi oggetto concreto che soddisfi gli assiomi possa essere accettato come ente valido per la teoria. Per Hilbert, *punto, linea, retta,* e *angolo*, sono semplici parole, non degli oggetti matematici ben precisi, immaginabili e visualizzabili. La retta del piano euclideo può essere interpretata come il cerchio massimo di cui parla Menelao per la superficie della sfera. Per Menelao sono invece due oggetti ben distinti le rette e i cerchi massimi e proprio per questo le “Sferiche” non sono classificabili come geoemtria non-euclidea. Con il suo approccio, ed eliminando del tutto gli enti geometrici concreti dalla sua formulazione, Hilbert studia solo le proprietà formali di una teoria, mentre l'introduzione di enti specifici crea quello che si chiama un modello di questa teoria. Hilbert ha creato le linee guida per studiare tutti i diversi modelli geometrici che si possono creare per la stessa teoria astratta.

BIBLIOGRAFIA

Fonti cartacee utilizzate:

- David Hilbert, “Fondamenti della Geometria, con i supplementi di Paul Bernays”, traduzione italiana Pietro Canetta, titolo originale “Grundlagen der Geometrie”, Prima Edizione 1970, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano;
- Claudia Gori, “Le Sferiche di Menelao”, tesi di laurea in Matematica, Università degli Studi di Roma, A. A. 2001-2002;
- Sir Thomas L. Heath, “Euclid, The Thirteen Books of The Elements, Vol. 1 (Books I and II”, Seconda Edizione, Dover Publications, New York, 1956.

Fonti internet consultate:

- it.wikipedia.org, voci consultate: David Hilbert, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Euclide, Logicismo.