

Liceo Scientifico Statale E. Fermi
Anno scolastico 2006/2007
Classe V Sezione C

GEOMETRIA NELLA MENTE, GEOMETRIE DEGLI SPAZI

*Dalla crisi dei fondamenti della matematica
alla relatività di Einstein*

di

Andrea Gaudiello



“La geometria richiede - come anche l'aritmetica - per venire fondata in modo coerente, solo poche, semplici proposizioni fondamentali. Queste proposizioni fondamentali si chiamano gli assiomi della geometria. L'esposizione degli assiomi della geometria e l'indagine sui loro mutui rapporti costituiscono un problema che è stato discusso sin dai tempi di Euclide, in numerosi ottimi trattati della letteratura matematica. Il problema indicato porta all'analisi logica della nostra intuizione dello spazio.”

D.Hilbert, Fondamenti della Geometria, 1900

“La matematica è quella scienza di cui non si sa di che cosa si parla e non si sa se quello che si dice sia vero o falso”

Bertrand Russell, Principia Mathematica

Sommario

INTRODUZIONE.....	- 3 -
<i>IN PRINCIPIO ERA EUCLIDE ...</i>	<i>- 3 -</i>
<i>IL “PROBLEMA” DEL V POSTULATO</i>	<i>- 4 -</i>
<i>POSSIBILI GEOMETRIE NON EUCLIDEE</i>	<i>- 5 -</i>
GEOMETRIA NELLA MENTE.....	- 6 -
<i>PERCHÉ GEOMETRIA NELLA MENTE?</i>	<i>- 6 -</i>
<i>BREVE DIGRESSIONE FILOSOFICA: IMMANUEL KANT</i>	<i>- 6 -</i>
<i>APPROCCIO MATEMATICO.....</i>	<i>- 8 -</i>
<i>LA GEOMETRIA IPERBOLICA</i>	<i>- 10 -</i>
<i>LOBACEVSKIJ.....</i>	<i>- 11 -</i>
GEOMETRIE DEGLI SPAZI.....	- 13 -
<i>LA RELATIVITÀ GENERALE</i>	<i>- 13 -</i>
<i>LA GRAVITÀ E LA CURVATURA DELLO SPAZIO</i>	<i>- 15 -</i>
<i>LA CURVATURA DELLO SPAZIO</i>	<i>- 16 -</i>
<i>LE ONDE GRAVITAZIONALI</i>	<i>- 17 -</i>
<i>CONFERME SPERIMENTALI.....</i>	<i>- 17 -</i>
GEOMETRIA NELLA MENTE, GEOMETRIE DEGLI SPAZI, COME GEOMETRIA DELLA CRISI.....	- 19 -
<i>INTRODUZIONE</i>	<i>- 19 -</i>
<i>BREVE STORIA DELLA LOGICA MATEMATICA DA BOOLE A RUSSELL</i>	<i>- 19 -</i>
<i>PROGRAMMA DI HILBERT</i>	<i>- 24 -</i>
<i>I LIMITI DEI SISTEMI FORMALI: GÖDEL E I TEOREMI D’INCOMPLETEZZA</i>	<i>- 24 -</i>
<i>Primo Teorema d’incompletezza</i>	<i>- 25 -</i>
<i>Secondo Teorema di incompletezza.....</i>	<i>- 25 -</i>
BIBLIOGRAFIA.....	- 27 -

INTRODUZIONE

La parola “geometria” deriva dal greco antico *γεωμετρία* ed è composto da *γεω*, *Geo* che significa "terra" e *μετρία*, *metria* che vuol dire "misura", quindi letteralmente *misurazione della terra*.

Nel corso dei secoli è venuta però assumere un significato più complesso, oggi possiamo infatti parlare non solo di geometria riferita ad un piano e ad uno spazio ma anche di geometria del tempo o meglio, di geometria spazio-temporale e di geometrie non euclidee.

Proprio su quest'ultime ci soffermeremo in particolar modo, passando attraverso la matematica, l'arte e la filosofia, ma anche la logica e la fisica.

In principio era Euclide...

La compilazione degli *Elementi*¹ (in greco *Στοιχεῖα*) è da collocarsi presumibilmente attorno al 300 a.C., essi rappresentano la sintesi di trecento anni di ricerca della matematica greca.

I principali meriti di quest'ultima possono essere riassunti schematicamente in due punti:

1. lo svincolamento della geometria della materia, infatti prima di Talete (vissuto intorno al 600 a.C.) gli enti geometrici non erano idealizzati, ma rappresentati in oggetti materiali. Il merito del pensiero greco fu dunque la capacità di renderli oggetti astratti.

2. L'introduzione del procedimento dimostrativo, il quale permise di condurre le dimostrazioni mediante il metodo deduttivo.

Euclide, negli *Elementi*, si concentrò soprattutto sulla definizione degli assiomi², i quali erano sostanzialmente ciò che il matematico alessandrino intendeva per gli enti geometrici fondamentali (per esempio punto, linea e piano).

I cinque postulati sono invece assunzioni, la cui evidenza non risulta immediata, essi si devono accogliere senza dimostrazione al fine di svolgere un sicuro ragionamento deduttivo.

Essi postulano, ovvero domandano:

1. che da qualsiasi punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto;
2. che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per diritto;
3. che con ogni centro e ogni distanza si possa descrivere un cerchio;
4. che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;

¹In greco *Stoicheia*. Sono un trattato di matematica composto di tredici libri concernenti la geometria piana, le proporzioni, le proprietà dei numeri, le grandezze incommensurabili e la geometria dei solidi. Frutto dell'applicazione sistematica del metodo deduttivo, gli *Elementi* di Euclide sono stati utilizzati per duemila anni come manuale didattico

² Normalmente questa parola viene erroneamente usata come sinonimo di “postulato”, la distinzione tra assioma e postulato è alla base della geometria euclidea, in quanto il primo termine designa i principi fondamentali assunti in tutti i sistemi deduttivi, mentre con il secondo si indicano i principi veri per un sistema particolare, per appunto quello euclideo.

5. che se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di 2 retti, le due rette prolungate all'infinito s'incontreranno nella parte in cui gli angoli sono minori dei due retti (fig. 1)

I postulati sopra citati, come mise bene in luce la critica ottocentesca, sono però incompleti e il loro interesse oggi risulta prevalentemente storico.

Per Euclide inoltre era ben definita la linea di demarcazione tra il concetto di assioma e quello di postulato, tuttavia nella moderna impostazione della geometria avvenuta nel 1899 grazie a David Hilbert questi sono indistinguibili.

Gli assiomi euclidei sono i seguenti:

1. Cose uguali a una stessa sono uguali tra loro.
2. Se a cose uguali sono tolte cose uguali, si ottengono ancora cose uguali.
3. Se a cose uguali sono aggiunte cose uguali, si ottengono ancora cose uguali.
4. Cose che coincidono tra loro sono uguali.
5. Il tutto è maggiore della parti.

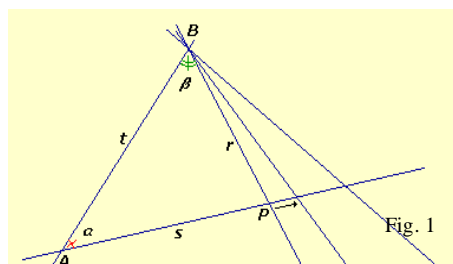
Anche gli assiomi, come i postulati, furono oggetto di numerose critiche: una fra tutte che significò dare al verbo “coincidere”?

Probabilmente lo stesso Euclide accettava il punto di vista di Aristotele, il quale affermava che i postulati e gli assiomi andassero verificati con l'esperienza, quindi questi venivano trattati come “ipotesi” da confrontare nella realtà, nonostante questo, i greci avevano ben chiara la distinzione tra astrazione e mondo fisico.

Il “problema” del V postulato

Come già indicato in precedenza il V postulato di Euclide asserisce che: *“se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti”*³.

L'ultimo postulato risulta quindi meno immediato dei precedenti quattro, infatti, se due rette r e s formano con la loro trasversale t angoli la cui somma è esigua, risulterà ovvio che le due rette s'incontreranno in un punto P .



³ Euclide, Elementi

Teniamo ora fisse le rette t e s e facciamo ruotare r in senso antiorario intorno a B , il postulato afferma che r continuerà a incontrare s finché $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Si può notare però che al ruotare di r il punto P si allontana sempre più da A su s , finendo per uscire dal foglio e quindi cessando conseguentemente di essere osservabile. Ne deriva che non è più possibile notare che la retta r non abbia più un punto in comune con s quando $\alpha + \beta = 180^\circ$.

(Vedi fig.1)

Questo è uno dei motivi per cui il V postulato risulta poco evidente, in quanto non si possono fornire le grandezze degli angoli solamente con un certo grado di approssimazione.

Esistono, oltre alla già sopra citata, altre formulazioni del V postulato, successive a Euclide, la più nota è forse quella data dal filosofo greco Proclo nel quinto secolo d.C. e ripresa successivamente dal matematico scozzese John Playfair nel XVIII secolo, la quale asserisce che:

“Data una qualsiasi retta r e un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una e una sola parallela alla retta data”

Da non dimenticare è la definizione data da Girolamo Saccheri (1667-1733) che nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* afferma che se in un quadrilatero $ABCD$, avente gli angoli \hat{A} e \hat{B} retti ed i lati \overline{AD} e \overline{BC} uguali, allora anche gli altri due angoli sono retti.

Per concludere, possiamo affermare che il V postulato è veramente indimostrabile a partire dai primi quattro postulati di Euclide, e che le ipotesi di Padre Saccheri portano a tre diverse geometrie: rispettivamente quella di Euclide, quella di Bolyai-Lobacevskij e quella di Riemann.

Possibili geometrie non euclidee

Esistono a seconda della negazione del V postulato di Euclide due principali possibilità di geometria, infatti otteniamo:

1. La geometria ellittica riemaniana della sfera se scelto un punto P fuori dalla retta r non esistono parallele per P a r , in altre parole tutte le rette per P intersecano r ;
2. La geometria iperbolica se “dati un piano e una retta e un punto esterno, per il punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data”⁴

Riamando al capitolo successivo per una visione più approfondita dei due postulati sopra citati.

⁴ Assioma del matematico russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (Никола́й Ива́нович Лобаче́вский), che diede vita al modello iperbolico di geometria.

I

GEOMETRIA NELLA MENTE

Perché geometria nella mente?

Il concetto di geometria non euclidea compare nel momento in cui si rinuncia alla naturale idea che i concetti espressi dalle geometrie siano solamente una descrizione di oggetti e fenomeni del mondo fisico. Questo è dovuto al fatto che la geometria euclidea si basa su ipotesi verificabili nella realtà, nel momento in cui una di queste dovesse venire meno si produrrebbe un modello geometrico diverso da quello reale e quindi conseguentemente non riscontrabile. Il passaggio concettuale dinanzi a cui ci troviamo è molto sottile, per esempio, la definizione di retta è un modo utile di parlare di fili tesi o i fili tesi sono un modello utile delle rette?

Se considerassimo vera la prima ipotesi, i teoremi geometrici sulle rette sarebbero semplicemente una tecnica per indagare sui fili tesi e sulle loro proprietà.

Viceversa, se considerassimo vera la seconda, otterremmo che le proprietà delle rette dovranno essere dedotte dai postulati e non più o meno evidenti proprietà dei fili tesi...

Geometria nella mente, quindi, in quanto distaccata dalla “normale” e comune idea di realtà, assoluta nel significato etimologico della parola. Le geometrie non euclidee sono prive di contraddizioni logiche al loro interno, nonostante spesso risultino contro intuitive e apparentemente sistemi a sé, anche se come vedremo esse troveranno diverse applicazioni nel Novecento, ma questa è tutta un'altra storia...

Breve digressione filosofica: Immanuel Kant

“Tempo e spazio sono pertanto due fonti del conoscere, dalle quali possono essere attinte a priori varie conoscenze sintetiche, come segnatamente ce ne da uno splendido esempio la matematica pura, rispetto alla conoscenza dello spazio e dei suoi rapporti. Essi cioè sono, tutte e due, forme pure di tutte le intuizioni sensibili; e così rendono possibili proposizioni sintetiche a priori”

(Immanuel Kant, CRP, Estetica Trascendentale §7)

Con queste parole il filosofo tedesco Immanuel Kant afferma, nel 1781, la possibilità di pensare il tempo e lo spazio esclusivamente come intuizioni pure a priori; infatti solamente in questo modo, si può spiegare e giustificare la possibilità di concepire la matematica pura.

Come scrive nei *Prolegomeni ad ogni futura metafisica*, la matematica deve prima rappresentare tutti i suoi concetti, ossia *costruirli*, nell'intuizione. La geometria pone a fondamento l'intuizione pura dello spazio.

Erroneamente viene attribuita a Kant una visione euclidea dello spazio, il filosofo di Königsberg, come spiega bene Piero Martinetti⁵, aveva preveduto una *Scienza di tutte le forme possibili dello spazio* prevedendo altre eventuali forme dell'intuizione.

Il Martinetti continua inoltre riportandoci l'opinione di Georg Rimmel, che riprende perfettamente la precedentemente decritta:

“Gli assiomi geometrici sono così poco necessari logicamente come la legge

causale; si possono pensare spazi, e quindi geometrie, in cui valgono tutt'altri

assiomi che i nostri, come ha mostrato la geometria non euclidea nel secolo dopo Kant. Ma essi sono incondizionatamente necessari per la nostra esperienza, perché essi solamente la costituiscono. Helmholtz⁶ errò quindi completamente nel considerare la possibilità di rappresentarci senza contraddizione spazi nei quali non valgono gli assiomi euclidei come una confutazione del valore universale e necessario di questi, da Kant affermato. Infatti l'apriorità kantiana significa solo universalità e necessità per il mondo della nostra esperienza, una validità non logica, assoluta, ma ristretta alla cerchia del mondo sensibile. Le geometrie antieuclidee varrebbero a confutare l'apriorità dei nostri assiomi solo quando qualcuno fosse riuscito a raccogliere le sue esperienze in uno spazio pseudo-sferico, o a riunire le sue sensazioni in una forma di spazio nel quale non valesse l'assioma delle parallele”.

Le geometrie non euclidee vengono quindi scorrettamente definite un “corpo mortale” inferto alla filosofia kantiana, e costituiscono un pretesto per eliminare il ruolo dell'intuizione geometrica.

«In un certo senso possiamo affermare che la scoperta della geometria non euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta di grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico»⁷.

Fa eco a tale autentica “sciocchezza filosofica”⁸ il noto testo divulgativo di Herbert Meschkowski⁹: *«l'esistenza della geometria non euclidea rende impossibile all'uomo moderno di restare fermo alla concezione spaziale di Platone e di Kant».*

⁵ Lezioni su Kant, svolte presso l'Università di Torino tra il 1924 e il 1927; Feltrinelli, Milano, 1968, p. 47.

⁶ Sarà trattato nei paragrafi successivi.

⁷ Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968; trad. it. Storia della matematica, I.S.E.D.I., Torino, 1976; Oscar Mondadori, Milano 1980, 1990, pp. 621-622.

⁸ Gauss, che riteneva la geometria di origine empirica, e voleva verificare con esperimenti ottici se lo “spazio reale” fosse euclideo.

⁹ H. Meschkowski, *Noneuclidean Geometry*, Academic Press 1964 e Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino, 1973, p. 87.

Approccio matematico

Riemann e la geometria della sfera

“Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune” da questo assioma si può quindi concludere che in questa geometria non esistono rette parallele, inoltre sostituendolo nel sistema hilbertiano, otteniamo un sistema contraddittorio.



Mentre la geometria euclidea piana si dimostra senza far uso degli assiomi della parallela¹⁰, l'assioma di Riemann asserisce che non esistono rette parallele, questa contraddizione mostra che bisogna apportare ulteriori modifiche al sistema degli assiomi della geometria euclidea, in modo da eliminarne l'incoerenza.

Dall'introduzione dell'assioma di Riemann si possono ottenere, a seconda delle modifiche apportate agli assiomi, due geometrie: una

detta sferica ed una detta ellittica.¹¹

Il primo caso lo si ottiene se le due rette hanno due punti P e P' in comune distinti, il secondo se questi coincidono. Nonostante ciò i modelli nel loro complesso sono molto simili.

Le principali caratteristiche di questa geometria sono:

1. le rette sono chiuse;
2. due punti antipodali dividono una retta passante per essi in due parti congruenti;
3. tutte le rette sono congruenti, hanno tutte la stessa lunghezza (finita);
4. per due punti passa almeno una retta, per coppie di punti antipodali ce ne possono essere infinite;
5. tutte le rette che passano per un punto dato passano anche per il suo antipodale;
6. non esistono triangoli o poligoni simili con aree differenti;
7. non esistono rettangoli;
8. il teorema di Pitagora non vale, ma si avvicina al vero col tendere a zero dell'area del triangolo;
9. due rette qualsiasi hanno un'unica perpendicolare in comune;

L'ultimo punto (10) è sicuramente uno dei più affascinanti ed introduce la figura del triangolo sferico. Si definisce triangolo sferico, una porzione di

¹⁰ Infatti per un punto passa almeno una retta parallela a una retta data.

Evandro Agazzi e Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori, Milano, 1978

¹¹ Secondo la nomenclatura introdotta da Klein.

sfera delimitata da tre “rette”, cioè da tre circonferenze massime, tre punti della sfera determinano tre “rette” e conseguentemente quattro triangoli sferici (Fig. 2).

La somma degli angoli α, β, γ non vale 180° come avviene nel piano, ma è variabile e comunque sempre superiore a 180° .

Si definisce ECCESSO SFERICO la differenza tra la somma delle misure in radianti dei tre angoli e la costante π , essa è positiva e non $>$ di 2π :

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi \leq 2\pi \quad (1)$$

Inoltre l'area del triangolo sferico (T), fissato il raggio (R) della sfera su cui lavorare, è proporzionale al suo eccesso sferico, vale a dire:

$$\text{Area}(T) = R^2 * \text{ECCESSO SFERICO}$$

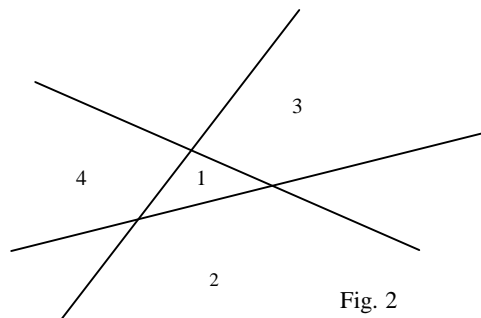


Fig. 2

Un'altra importante osservazione è che, mentre il piano euclideo è infinitamente esteso, la sfera S^2 ha area finita.

La geometria sferica fu inoltre utilizzata da Albert Einstein nella trattazione della relatività generale, infatti la utilizzò nella compilazione delle equazioni gravitazionali¹².

Nella conferenza di Kyoto del 1922 Einstein affermò:

*“Se tutti i sistemi sono equivalenti allora la geometria euclidea non può valere in ciascuno di essi. Abbandonare la geometria e conservare le leggi fisiche è come descrivere i pensieri senza parole. Bisogna cercare le parole prima di poter esprimere i pensieri. Che cosa si doveva cercare a questo punto? Tale problema rimase insolubile per me fino al 1912, quando all'improvviso mi resi conto che la teoria di Gauss delle superfici forniva la chiave per svelare questo mistero. Compresi che le coordinate di una superficie di Gauss avevano un profondo significato. Non sapevo però a quell'epoca che Riemann aveva studiato i fondamenti della geometria in maniera ancora più profonda. [...] Mi resi conto che i fondamenti della geometria avevano un significato fisico. Quando da Praga tornai a Zurigo, vi trovai il matematico Grossmann, mio caro amico: da lui appresi le prime notizie sul lavoro di Ricci e in seguito su quello di Riemann”*¹³

¹² La formula che riassume le equazioni di campo è espressa dalla relazione:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

dove :

$R_{\mu\nu}$: tensore di curvatura di Ricci,

R: scalare di curvatura di Ricci, cioè la traccia di R_{ik}

$g_{\mu\nu}$: tensore metrico,

Λ : costante cosmologica,

$T_{\mu\nu}$: tensore stress-energia,

c: velocità della luce,

G: costante di gravitazione universale. Il tensore $g_{\mu\nu}$ descrive la metrica dello spazio-tempo ed è un tensore simmetrico 4x4, che quindi ha 10 componenti indipendenti; date le 4 coordinate utilizzate, le equazioni indipendenti si riducono a 6.

Antonio Caforio e Aldo Ferilli, Nuova Physica 2000, Le Monnier

¹³ http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/frmset_benvenuto.htm

La geometria iperbolica

Saccheri per tutta la vita cercò di dimostrare il postulato della parallela, senza però riuscirci, dopo numerosi e vani tentativi concluse in questo modo:

“L’ipotesi d’angolo acuto è assolutamente falsa; essa ripugna la natura della linea retta.”¹⁴

In realtà Saccheri aveva cercato di dimostrare il V postulato per assurdo, ma non era “incappato” in nessuna contraddizione logica: nasceva la geometria iperbolica.

Esistono tre principali modelli di geometria iperbolica:

1. Il modello di Klein;
2. Il modello a disco di Poincaré;
3. Il modello di Minkowski,

Il modello di Klein e quello di Poicaré sono molto simili, li tratteremo perciò insieme; gli elementi della geometria iperbolica vengono interpretati nel seguente modo:

Piano: un cerchio euclideo, esclusa la circonferenza;

Punti: i punti interni alla circonferenza;

Rette: le corde, compresi i diametri, ovviamente esclusi gli estremi;

In questo modo, data una retta ed un punto non appartenente ad essa, esistono infinite rette parallele ad essa, cioè che non la intersecano, in accordo con la negazione del quinto postulato di Euclide, che è un assioma fondamentale della geometria iperbolica. Questo modello, seppure semplice da descrivere, presenta dei problemi, in particolare per quanto riguarda il concetto di angolo: non è possibile infatti dare la stessa definizione di angolo che si dà nel piano euclideo.

Il modello di Minkowski, impiega un iperboloide N-dimensionale di rotazione immerso in uno spazio euclideo N+1-dimensionale. Questo modello impiega una metrica per cui la distanza tra due punti qualsiasi sull' iperboloide è:

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 + x_{N+1}^2$$

ossia la stessa metrica usata nella relatività speciale per descrivere lo spaziotempo.¹⁵

¹⁴ Saccheri (1773) Prop. XXXIII e Roger Penrose, La strada che porta alla realtà, BUR

Lobacevskij

Nikolaj Ivanovič Lobacevskij è stato il più illustre matematico che si è occupato dei fondamenti della geometria euclidea, fu professore dal 1827 al 1846 presso l'università russa di Kezan, tra i suoi scritti più famosi ricordiamo *Sui fondamenti della geometria* (1829), *Geometria immaginaria* (1835) e *Nuovi fondamenti della geometria, con una teoria completa delle parallele* (1835).

Lobacevskij propone un modello geometrico nel quale il V postulato è sostituito con il seguente:

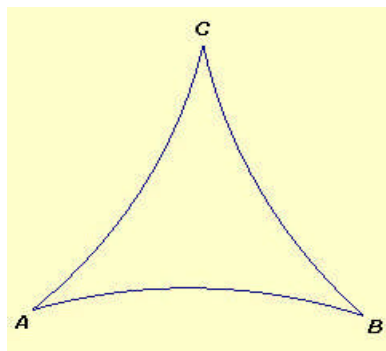
“Data una retta L e qualche punto A non su L , almeno due rette distinte esistono che passano per A e sono parallele a L .” In questo caso *parallelo* significa che le rette non intersecano L , anche se non hanno distanza costante da L e due parallele per un punto a una retta data dividono il piano in quattro parti: in due parti opposte sono racchiuse le rette convergenti, nelle rimanenti due le divergenti.

I principali teoremi di questa geometria sono¹⁶:

[47] *La perpendicolare da un punto su una retta alla retta stessa può essere una soltanto.*

Pertanto due perpendicolari a una medesima retta non possono intersecarsi.

[90] *Nel triangolo rettilineo (piano) la somma degli angoli non può essere mai maggiore di 180° .*¹⁷



Cerchiamo di dimostrare questo teorema. Teniamo innanzitutto presente che in un triangolo la somma di due angoli è minore di un angolo piatto, questo che è un teorema della geometria euclidea resta valido anche in quella iperbolica, non necessita infatti del V postulato per essere dimostrato. Partiamo dal triangolo iperbolico ABC e congiungiamo A con M , punto medio di CB ; prolunghiamo la mediana AM di un segmento $MD = AM$ e otteniamo il triangolo ABD .

¹⁵ "Minkowski, Hermann." Microsoft® Encarta® 2007 [DVD]. Microsoft Corporation, 2006.

¹⁶ I numeri riportati si riferiscono ai Nuovi Principi della Geometria di Lobacevskij.

¹⁷ La dimostrazione del teorema è stata ripresa dal sito http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/frmset_benvenuto.htm

La somma degli angoli interni di ABC è uguale alla somma degli angoli interni di ABD , infatti:

$$\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB$$

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$$

per costruzione

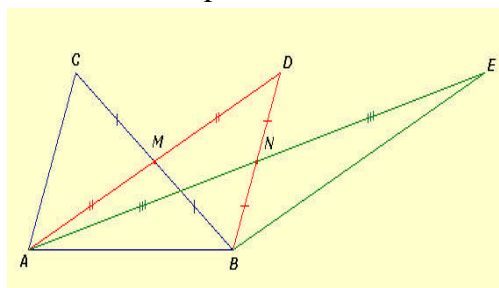
$$\angle ACB = \angle CBD$$

$$\angle CAD = \angle ADB$$

poiché i triangoli ACM e MBD sono congruenti (I criterio di congruenza)

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB &= \angle ABC + \angle CBD + (\angle CAD + \angle DAB) = (\angle ABC + \\ &\quad \angle CBD) + \angle CAD + \angle DAB = \angle ABD + \angle ADB + \angle DAB \end{aligned}$$

Ripetiamo la costruzione congiungendo A con N , punto medio di BD , e prolungando la mediana AN di un segmento $NE = AN$. Il triangolo ABE così ottenuto ha la somma degli angoli interni uguale a quella di ABC e di ABD . Ragionando sempre allo stesso modo possiamo costruire infiniti nuovi triangoli la cui somma degli angoli interni sia pari alle precedenti, arrivando ad avere una mediana “infinita” e la misura dell’ampiezza di uno degli angoli del triangolo tendente a 0.



Sappiamo che la somma di due angoli di un triangolo non può superare l’ampiezza di 180° ; in particolare questo accadrà per l’ultimo triangolo, quello con un angolo tendente a 0. In questo caso la somma degli angoli interni sarà minore di 180° . Poiché tutti i triangoli di base AB costruiti secondo il metodo precedente hanno la somma degli angoli interni uguale, possiamo affermare che:

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB < 180^\circ$$

[101] Se nei triangoli la somma dei tre angoli è uguale a 180° , allora le due perpendicolari a una stessa linea retta sono parallele tra loro

II

GEOMETRIE DEGLI SPAZI

Lo spazio non è un concetto empirico, ricavato da esperienze esterne. [...] Lo spazio è una rappresentazione necessaria a priori, la quale sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne. Non si può mai formare la rappresentazione che non vi sia spazio, sebbene si possa benissimo pensare che in esso non si trovi nessun oggetto.
(Kant, CRP, *Estetica trascendentale*, § 2: 1-2, pp. 66-67)

In questa sezione ci occuperemo del rapporto tra geometria e spazio fisico, in particolar modo della relatività generale.

Prima di iniziare, un chiarimento, perché geometrie e non geometria?

Gauss non rinunciò mai all'idea che lo spazio "reale" fosse euclideo e cercava di dimostrare questa sua ipotesi con esperimenti di ottica.

Come però ho cercato di chiarire nella sezione *Geometria nella mente*, la geometria in quanto tale non si basa su concetti di origine empirica, ma si tratta di un sistema assoluto, sciolto dalla realtà; parlo di *Geometrie degli spazi* in quanto alla realtà possiamo attribuire diversi modelli geometrici, non sempre, però così intuitivi e scontati.

Einstein con la sua teoria ce ne dà una superba dimostrazione, la "forma" della realtà è ben diversa da quella che i nostri sensi erroneamente ci trasmettono.

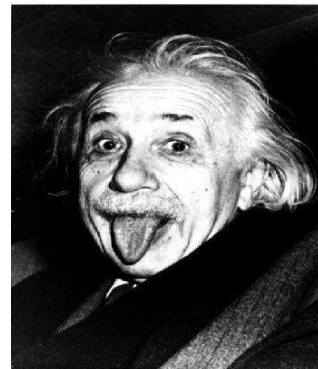
La relatività generale

Il problema della massa

La relatività ristretta formulata da Einstein nel 1905 considera sistemi di riferimento in moto relativo uniforme, non considera quindi i moti accelerati. Nella relatività generale Einstein postulò invece che: *"Le leggi della fisica devono essere di natura tale da valere rispetto ad un sistema di riferimento in moto arbitrario"*¹⁸.

La relatività generale fu presentata da Einstein nella sua forma definitiva nel 1916 con il titolo *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* e si basa sul principio d'equivalenza tra *massa inerziale* e *massa gravitazionale*; lo stesso Einstein scrive nel 1952: *"Questa teoria sorse in primo luogo dal tentativo di comprendere l'uguaglianza fra massa inerziale e massa gravitazionale"*¹⁹.

La *massa inerziale* nella fisica newtoniana è considerata una costante di proporzionalità tra la forza risultante e l'accelerazione di un corpo, è quindi facilmente deducibile che la massa è ciò che si oppone alla variazione di



¹⁸ A. Einstein Relatività generale §2 p3

¹⁹ A. Einstein, Relatività esposizione divulgativa, Universale scientifica Boringhieri, 1967 p 307

velocità. Possiamo ottenere una definizione migliore se consideriamo il terzo principio della dinamica, il quale afferma che:

*“Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æqualis et in partes contrarias dirigi”*²⁰

Ovvero:

“Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria. Quindi le mutue azioni fra due corpi sono sempre uguali e dirette in senso contrario”

Quindi considerando due corpi A e B, il primo con massa inerziale conosciuta, il secondo con massa inerziale da determinare e assumendo le due masse come costanti, la forza che agirà sarà:

$F_{AB} = m_A a_A$, $F_{BA} = m_B a_B$ La terza legge di Newton ci dice che le due forze sono uguali e opposte e quindi: $F_{AB} = -F_{BA}$. Infine sostituendo la precedente relazione otterremo:

$$m_B = \frac{a_A}{a_B} m_A$$

Quindi, misurando l'accelerazione di A e quella di B siamo in grado di determinare m_B in termini di m_A , come desiderato.

Per massa gravitazionale intendiamo invece la seguente definizione:

“Qualsiasi oggetto dell'Universo attrae ogni altro oggetto con una forza diretta lungo la linea che congiunge i baricentri dei due oggetti, di intensità direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza”

Scritto in formula algebrica²¹:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

La legge sopra indicata vale solamente se consideriamo corpi puntiformi, nel caso di corpi estesi spazialmente bisognerà ricorrere al calcolo integrale. Da un punto di vista concettuale le due masse sopra descritte sono molto diverse, assumendole uguali ci troviamo di fronte all'impossibilità di distinguere tra gravitazione e moto non uniforme. Lo stesso Newton nell'introdurre la gravità riconobbe i limiti della sua teoria, infatti egli cercò

²⁰ Cit.

²¹ Dove :

F = modulo della forza gravitazionale intercorrente tra i corpi;

G = costante di gravitazione universale;

m_1 = massa del primo corpo;

m_2 = massa del secondo corpo;

r = modulo della distanza tra i due corpi.

di calcolare gli effetti della gravità come forza universale, ma si rifiutò di spiegarne la sua natura.

Con Einstein²² ci troviamo d'innanzi a una vera e propria rivoluzione, infatti in un qualsiasi punto dello spazio, la gravità e un'opportuna accelerazione sono concetti del tutto equivalenti.

Per descrivere questa situazione utilizzeremo uno dei più famosi *Gedanken Experimenten* di Einstein, quello dell'ascensore. Consideriamo un osservatore dentro un ascensore, sospeso a un cavo, fermo rispetto alla Terra.

Supponiamo ora che l'ascensore precipiti in caduta libera, prima di schiantarsi l'osservatore al suo interno potrà constatare che ogni corpo (compreso lui) galleggia privo di peso.

Trasportiamo ora il nostro ascensore nello spazio, lontano da qualsiasi corpo materiale. Anche in questo caso l'osservatore nota che gli oggetti galleggiano privi di peso. Se l'osservatore non fosse consapevole della sua posizione spaziale (sulla Terra o nello spazio) non riuscirebbe a distinguere questa situazione dalla precedentemente descritta. Dall'analisi di queste osservazioni possiamo dedurre la seguente legge:



“ogni sistema di riferimento inerziale, immerso in un campo gravitazionale uniforme, è del tutto equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato (rispetto al primo) nel quale non vi sia alcun campo gravitazionale”

La gravità e la curvatura dello spazio *I tensori*²³

Il concetto di tensore è la generalizzazione di concetti quali vettori e matrici, e permette, in fisica, di scrivere equazioni che dipendono solo da quantità fisiche. Possiamo considerare il tensore come una generalizzazione del concetto di vettore; il tensore è un vettore pluridimensionale. Per la complicatezza e la lunghezza di questo argomento mi limiterò solamente a citare i diversi tensori utilizzati nella relatività generale.

Troviamo tre diversi tensori:

1. il *tensore di curvatura*, che descrive il modo in cui la Gravità tende a far contrarre o espandere una distribuzione di materia ;
2. il *tensore metrico*, che misura il tempo in un sistema di riferimento non vincolato, cioè in caduta libera (come l'ascensore di Einstein);

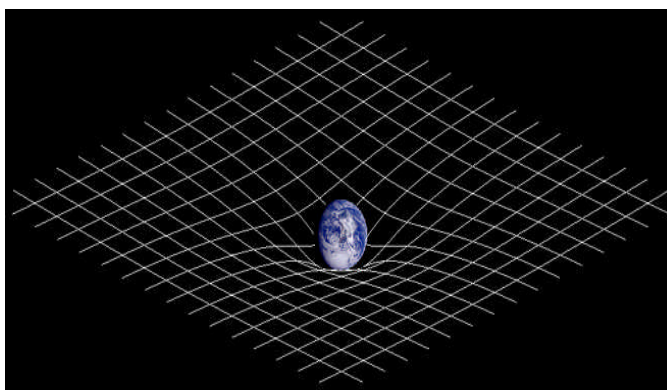
²² Einstein si basò sull'intuizione che aveva avuto precedentemente Ernst Mach. L'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale è stata sperimentalmente verificata con una precisione dell'ordine di 10^9 dell'ungherese R. von Eotvos. Negli ultimi tempi con una precisione di 10^{12} grazie a Dicke, Braginsky e Panov.

²³ <http://www.vialattea.net/esperti/php/risposta.php?num=6626#vialattea1>

3. il *tensore energia-impulso della materia*, che viene ereditato dalla teoria dei campi, descrive la densità di energia e il flusso di impulso e di momento angolare della materia (particelle, atomi, molecole, etc.) in ogni punto dello Spazio, ad ogni istante.

La curvatura dello spazio

Nella relatività generale la gravità diventa una proprietà geometrica dello spazio-tempo, infatti un oggetto massivo tende ad incurvare lo spazio che lo circonda. Reciprocamente una curvatura dello spazio, sta a indicare la presenza di un oggetto massivo. Questo è stato ben espresso e riassunto dallo scienziato americano J.A. Wheeler : “ *la materia dice allo spazio come incurvarsi e lo spazio dice alla materia come muoversi*”.



Ogniquale volta un corpo penetra in un campo gravitazionale, esso segue il percorso più breve, rappresentato dalla curvatura del cronotopo che prende il nome di geodetica²⁴.

Per chiarire meglio questo concetto, possiamo raffigurare l'universo come un telo elastico e la terra come un oggetto sferico abbastanza pesante da deformarlo. La superficie deformata sta a indicare come gli effetti gravitazionali sono più intensi dove la curvatura è più accentuata. Allo stesso modo un telo privo di oggetti risulterà piatto: esso rappresenta lo spazio in assenza di gravità.

L'esempio sopra proposto è solo una semplificazione delle dimensioni raffigurabili, in quanto ad essere deformato è lo spazio-tempo e non solo le dimensioni spaziali, cosa impossibile da raffigurare e difficile da concepire. Nota la disposizione delle masse, le equazioni di campo, ci permettono di

²⁴ Sono le circonferenze massime e sono gli equivalenti del concetto di retta euclidea nella geometria di Riemann. Einstein fu il primo scienziato ad utilizzare il concetto di geodetica in fisica. Egli ne diede la seguente definizione:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0$$

Essa rappresenta una linea (non un'area) tracciata fra due punti P_1 e P_2 del continuo quadridimensionale (tre dimensioni dello spazio e una del tempo). Le curve che passano per detti punti sono infinitamente vicine alla geodetica. Esprimendole in forma parametrica e con altre 2 pagine circa di passaggi, Einstein deduce l'equazione della geodetica:

$$d^2 x^\tau / ds^2 + \tau, \mu, \nu * dx^\mu / ds * dx^\nu / ds = 0.$$

Vedi § sulla geometria della sfera.

Inoltre A. Einstein Relatività generale § 9 p 16

calcolare la geometria dello spazio tempo, esse rappresentano la base teorica fondamentale della relatività generale.²⁵

Le onde gravitazionali

Come noto una carica elettrica in movimento dà luogo ad un'onda elettromagnetica. Analogamente si ritiene che masse in moto o esplosioni stellari di masse molto grandi generino onde gravitazionali. Anche le onde gravitazionali²⁶, come le onde elettromagnetiche, si propagano nello spazio alla velocità della luce, inoltre anch'esse trasportano energia seppure estremamente bassa.

L'esistenza delle onde gravitazionali fu prevista da Einstein nel 1916, finora però non sono state rilevate direttamente in maniera sperimentale, anche se sono state costruite sofisticatissime apparecchiature per rilevarle; è stata invece possibile una rilevazione indiretta, grazie ad un sistema stellare formato da due stelle di neutroni, scoperto nel 1974 da Russell Hulse. Le pulsar, infatti, sono stelle di neutroni il cui asse magnetico è inclinato rispetto all'asse di rotazione, il quale è posizionato in maniera tale che ad ogni rotazione uno dei poli magnetici è orientato verso la Terra. Dai poli magnetici sfuggono elettroni a velocità prossime a quella della luce, che muovendosi lungo le linee di forza del campo magnetico emettono onde radio. Perciò ogni volta che un polo magnetico è rivolto verso di noi riceviamo un impulso di radiazione. La frequenza degli impulsi ci dà il periodo di rotazione, che solitamente è molto costante.

Hulse si accorse che il periodo diminuiva e cresceva ogni 7 h e 45 minuti, questo era dovuto al fatto che la pulsar si avvicinava e si allontanava dalla Terra periodicamente. La dimostrazione dell'esistenza delle onde gravitazionali fu dedotta dalla diminuzione di energia dal sistema.

Per questa scoperta Hulse vinse il premio Nobel per la Fisica nel 1993.

Conferme sperimentali

La prima conferma sperimentale della teoria einsteiniana che la luce è soggetta a un campo gravitazionale si ebbe nel 1919 grazie all'astronomo inglese Sir Arthur Stanley Eddington.

L'esperimento si svolse durante un'eclisse totale di sole perfettamente visibile dall'Isola di Principe, isolotto portoghese situato al largo delle coste occidentali dell'Africa.

²⁵ L'equazione di campo è già stata vista nella nota precedente.

²⁶ Un'onda gravitazionale trasporta un momento angolare specifico che è il doppio di quello di un'onda elettromagnetica di pari intensità, perché i quanti dell'onda - i gravitoni - hanno uno spin intrinseco pari a 2 in unità di Planck (anziché 1, come i fotoni). Questa è un'importante proprietà che segue dal carattere tensoriale dell'interazione gravitazionale, grazie al quale due masse dello stesso segno si attirano (anziché respingersi, come accade in elettromagnetismo tra due cariche dello stesso segno). Da un punto di vista pratico, la differenza più importante è l'estrema debolezza delle onde gravitazionali rispetto a quelle elettromagnetiche.

<http://www.ecplanet.com/canale/astronomia-9/astrofisica-119/0/0/10655/it/ecplanet.rxd>

Eddington utilizzò tecnologie fotografiche e radiointerferometri che e constatò che la posizione di alcune stelle lontane, i cui raggi luminosi passavano in prossimità della superficie del Sole erano diverse da quella reale. I raggi di luce infatti in prossimità della massa solare curvavano seguendo le geodetiche dello spazio. In realtà però, le osservazioni avevano un errore medio dello stesso ordine di grandezza dell'effetto considerato.

Era quindi necessaria un'altra prova. Le tre leggi di Keplero, spiegano magnificamente i moti dei pianeti intorno al Sole, tranne però quella di Mercurio. L'orbita ellittica del pianeta dovrebbe avere una posizione fissa, invece per effetto delle perturbazioni, ruota nello spazio descrivendo un giro completo in 2250 secondi.

Questo fenomeno è noto come precessione del perielio e il valore misurato è dunque pari a 574 secondi d'arco per secondo.

Einstein risolse il problema applicando all'orbita del pianeta le correzioni relativistiche, che possiamo riassumere in due punti:

1. Bisogna tenere conto che lo spazio in cui si muove Mercurio non è piano, ma curvo a causa della distorsione dovuta a un corpo di grande massa, qual è appunto il Sole, per questo le distanze e gli angoli sono diversi da quelli di uno spazio piano;
2. L'effetto dovuto alla velocità del pianeta, la cui massa inerziale aumenta (come previsto dalla relatività ristretta), e si ha quindi una modifica della forza gravitazionale dipendente dalla velocità orbitale.

Un'altra conferma più recente, ma ormai completamente accettata dalla comunità scientifica, è l'effetto lente gravitazionale di cui le osservazioni di Eddington sono un caso particolare. La luce emessa da una sorgente lontana, transitando nelle vicinanze di un oggetto molto massiccio può venire deviata, con un effetto complessivo che può sdoppiare (o meglio trasformare in un anello), l'immagine della sorgente. Fra i fenomeni più spettacolari prodotti dalle lenti gravitazionali c'è certamente il cosiddetto *anello di Einstein*. Esso si verifica quando la sorgente luminosa ed il corpo celeste che funge da lente gravitazionale siano posti sulla stessa linea di vista rispetto all'osservatore: in questo caso, in conseguenza della simmetria circolare della configurazione ottica, si osservano non delle immagini multiple della sorgente, ma un anello luminoso centrato sulla posizione in cielo della lente gravitazionale.

III

GEOMETRIA NELLA MENTE, GEOMETRIE DEGLI SPAZI COME GEOMETRIA DELLA CRISI

*“In logica non ci sono sorprese”
Ludwig Wittgenstein*

Introduzione

Nel secondo “Congresso mondiale dei matematici”, tenutosi a Parigi l'8 agosto del 1900²⁷, David Hilbert²⁸ stilò una lista dei 23 problemi matematici più incombenti, allora ancora irrisolti, tra questi i primi due erano legati alla “questione” dei fondamenti della matematica.²⁹

In H1 Hilbert si chiedeva se “non esistesse nessun insieme la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali” (ipotesi del continuo avanzata da Georg Cantor) e se l'insieme dei numeri naturali fosse ben ordinato.

In H2 chiedeva una dimostrazione della *non contraddittorietà*³⁰ degli assiomi dell'aritmetica, cioè del fatto che partendo da quegli assiomi non fosse possibile dedurre due proposizioni che fossero l'una la negazione logica dell'altra.

Quest'ultimo problema ci è particolarmente caro, infatti in esso è insita la questione di cui tanto abbiamo discusso nel capitolo I, si tratta del nodo cruciale in cui era “incappato” Saccheri senza neppure rendersene conto. Questa tema verrà risolto solamente nel 1931 da Kurt Gödel.

Breve storia della logica matematica da Boole a Russell

La nascita della moderna logica matematica avviene nel 1847 per opera di George Boole (1815-1864). Egli riuscì a descrivere la teoria dei sillogismi in termini di equazioni algebriche e diede un solido procedimento meccanico per la loro soluzione. L'utilizzazione dell'algebra aveva innumerevoli vantaggi, infatti le medesime regole che descrivevano la sillogistica, potevano essere utilizzate anche per la logica proposizionale. Boole nell'*Analisi matematica della logica*, partì da un'osservazione già parzialmente anticipata da Leibniz, i valori di verità “vero” e “falso” potevano essere applicati ai numeri 1 e 0. La negazione di p si può interpretare come la sottrazione $1-p$ e la congiunzione di p e q si può

²⁷ Il primo Congresso si era tenuto a Zurigo nel 1897

²⁸ David Hilbert nasce a Königsberg, Prussia (ora Kaliningrad, Russia) nel 1862 e muore a Göttingen, Germania, nel 1943. Uno dei più eminenti matematici a cavallo tra l'800 e il 900, pubblicò, nel 1899, il *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria), sicuramente il libro che ebbe la più grande influenza in questo campo, dopo Euclide. Tra gli innumerevoli suoi contributi fondamentali ai vari campi della matematica ricordiamo solo i *23 Problemi*, proposti nel Secondo Congresso Internazionale di Matematici, a Parigi nel 1900, alcuni dei quali sono ancora insoluti.

²⁹ Indicheremo i diversi quesiti con la lettera “H” seguita dalla numerazione corrispondente.

³⁰ La non contraddittorietà è detta anche *coerenza*. Noi useremo in modo equivalente le due espressioni.

interpretare come il prodotto pq , inoltre la disgiunzione viene indicata con la somma logica $p+q$ (da notare che non si tratta di una vera e propria somma numerica in quanto se assumiamo $q=1$ e $p=1$, quindi entrambe vere, la loro somma non darà 2 ma 1).

Poste queste definizioni è possibile enunciare gli assiomi del calcolo di Boole, vale a dire la leggi fondamentali del pensiero, di seguito ne daremo solamente alcuni esempi:³¹

- $xy=yx$;
- $x^2=x$;
- $1x=x$;
- $0x=0$;
- $x+0=x$
- $x+(1-x)=1$

L'algebra di Boole trova numerose applicazioni nel campo dei computer e dell'elettronica. Un noto esempio di applicazione alla teoria dei circuiti elettrici è il seguente: siano p e q due proposizioni dichiarative, che possono essere solo o vere o false. Se si associa un interruttore a ciascuna delle due proposizioni p e q , che si chiude se la proposizione è vera e si apre se la proposizione è falsa, allora l'espressione $p \wedge q$ si può associare a due interruttori collegati in serie. La corrente fluisce nel circuito se e solo se entrambi gli interruttori sono chiusi, ossia se e solo se entrambe le proposizioni p e q sono vere. Analogamente, all'espressione $p \vee q$ si può associare un circuito che contiene un elemento con due interruttori connessi in parallelo, che permette il flusso di corrente se almeno uno dei due interruttori è chiuso, o se lo sono entrambi.

Un altro importante esponente che contribuì all'evoluzione della logica matematica fu Gottlob Frege (1848-1925), egli nella sua *Begriffsschrift* (Ideografia, un linguaggio in formule per il pensiero puro, 1879), procedette a una formalizzazione della logica, per cui le leggi logiche venivano presentate come teoremi di un calcolo contraddistinto da un determinato insieme di assiomi e di regole deduttive, ed erano accompagnate da un procedimento di simbolizzazione dei contenuti e delle operazioni logiche. In particolare, per eliminare le ambiguità del linguaggio ordinario e l'inadeguatezza dei sistemi logici esistenti, egli interpretò la proposizione come funzione in senso matematico e inventò notazioni simboliche, come i quantificatori e le variabili. La logica, per

la prima volta nella sua storia, non venne basata sulla distinzione soggetto-predicato, ma sulla distinzione tra funzione e argomento. L'abbandono della distinzione grammaticale soggetto-predicato come base della logica, differenzia la logica di Frege da quella di Aristotele e permette l'unificazione di logica dei termini (aristotelica) e logica enunciativa o

³¹ Nota: gli ultimi due assiomi citati furono prodotti insieme ad altri nel 1904 da Edward Huntington nel suo lavoro *Postulates for the Algebra of Logic* (Postulati per l'algebra della logica).

proposizionale (stoica) che erano rimaste per più di due millenni due branche separate della logica.³²

Lo stesso Boole, aveva mantenuto distinte le due logiche: segni, come +, ×, 1, 0, avevano significato diverso in logica dei termini (unione disgiunta, intersezione, universo, classe vuota) e in logica degli enunciati (disgiunzione esclusiva, congiunzione, vero, falso), e in aritmetica (addizione, moltiplicazione, 1, 0). Frege, al contrario, costruì un linguaggio logico universale in cui poter parlare dell'aritmetica.

I libri successivi di Frege non aggiunsero molto (per quanto concerne alla logica) a quello che aveva affermato nella sua *Ideografia*, avrebbero aggiunto parecchio se al loro ardita tesi antikantiana (il fatto che è possibile costruire un modello puramente logico dell'aritmetica) fosse risultata corretta.

Infatti nel 1902 Bertrand Russell scriveva al collega:

«Caro collega,

Da un anno e mezzo sono venuto a conoscenza dei suoi Grundgesetze der Arithmetik, ma solo ora mi è stato possibile trovare il tempo per uno studio completo dell'opera come avevo intenzione di fare. Mi trovo completamente d'accordo con lei su tutti i punti essenziali, in modo particolare col suo rifiuto di ogni elemento psicologico nella logica e col fatto di attribuire un grande valore all'ideografia per quel che riguarda i fondamenti della matematica e della logica formale, che, per inciso, si distinguono difficilmente tra loro. Riguardo a molti problemi particolari trovo nella sua opera discussioni, distinzioni e definizioni che si cercano invano nelle opere di altri logici. Specialmente per quel che riguarda le funzioni (cap. 9 del suo Begriffsschrift), sono giunto per mio conto a concezioni identiche, perfino nei dettagli. C'è solo un punto in cui ho trovato una difficoltà. Lei afferma (p. 17) che anche una funzione può comportarsi come l'elemento indeterminato. Questo è ciò che io credevo prima, ma ora tale opinione mi pare dubbia a causa della seguente contraddizione. Sia w il predicato «essere un predicato che non può predicarsi di se stesso». w può essere predicato di se stesso? Da ciascuna risposta segue l'opposto. Quindi dobbiamo concludere che w non è un predicato. Analogamente non esiste alcuna classe (concepita come totalità) formata da quelle classi che, pensate ognuna come totalità, non appartengono a se stesse. Concludo da questo che in certe situazioni una collezione definibile non costituisce una totalità.

Sto finendo un libro sui principi della matematica e in esso vorrei discutere la sua opera in tutti i dettagli.

Ho già i suoi libri o li acquisterò presto, ma Le sarei molto grato se mi potesse inviare gli estratti degli articoli usciti su riviste. Nel caso non sia possibile, comunque, potrò averli da una biblioteca. La trattazione rigorosa della logica nelle questioni fondamentali, dove i simboli non sono sufficienti, è rimasta molto indietro; nella sua opera ho trovato la migliore elaborazione del nostro tempo, e mi sono quindi permesso di esprimerle il mio profondo rispetto. Sono spiacente che Lei non abbia ancora pubblicato il secondo volume dei suoi Grundgesetze: spero tuttavia che ciò avvenga.

Molto rispettosamente suo

Bertrand Russell

³² http://www.dif.unige.it/epi/hp/penco/pub/FREGE_gal.pdf

(Ho scritto a Peano di questo fatto, ma non ho ancora ricevuto risposta.)»³³

Frege, che vide in tale antinomia il crollo del suo programma di riduzione della aritmetica alla logica, riduzione che passava attraverso un uso sistematico dell' "estensione" dei concetti, esprime in questo modo la sua desolazione:

«A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo aver completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione. Sono stato messo in questa situazione da una lettera del signor Bertrand Russell, quando la stampa di questo volume stava per essere finita. [...] Ma veniamo al fatto! Il signor Russell ha scoperto una contraddizione che ora esporrò.

Nessuno vorrà asserire, della classe degli uomini, che essa è un uomo. Abbiamo qui una classe che non appartiene a se stessa. Dico infatti che qualcosa appartiene a una classe se questo qualcosa cade sotto un concetto, la cui estensione è proprio la classe stessa. Fissiamo ora il concetto: classe che non appartiene a se stessa! L'estensione di questo concetto, ammesso che se ne possa parlare, è, per quanto detto, la classe delle classi che non appartengono a se stesse. Vogliamo chiamarla brevemente la classe K. Chiediamoci ora se questa classe K appartenga a se stessa! Supponiamo in primo luogo che essa appartenga a se stessa. Se qualcosa appartiene a una classe, cade sotto il concetto la cui estensione è la classe in esame, di conseguenza, se la nostra classe appartiene a se stessa, allora è una classe che non appartiene a se stessa. La nostra prima supposizione conduce quindi a una contraddizione. Supponiamo, in secondo luogo, che la nostra classe K non appartenga a se stessa: in questo caso essa cade sotto il concetto di cui essa stessa rappresenta l'estensione, quindi appartiene a se stessa: qui di nuovo abbiamo una contraddizione!»

La risposta di Frege, fu pubblicata in appendice al secondo volume dei *Principi di aritmetica*, è del 1903. Nello stesso anno Russell pubblica la sua antinomia nel volume *The Principles of Mathematics*. Negli stessi anni in cui Russell scrive la sua lettera, vi è un fiorire di diverse antinomie. Ne riporto qui di seguito un elenco³⁴ :

1. L'antinomia del mentitore, nota già nell'antichità.
2. L'antinomia di Burali-Forti (1897) che aveva preoccupato Cantor a partire dal 1895.
3. L'antinomia del massimo numero cardinale, trovata da Cantor nel 1899 e pubblicata nel 1932 con la sua corrispondenza.
4. L'antinomia di Russell (1903), osservata indipendentemente e contemporaneamente anche da Zermelo.

³³ Bellissima-Pagli, op.cit. pag. 184-186

³⁴ E.W. Beth, *I fondamenti logici della matematica* (Feltrinelli, Milano 1963).

E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano, 1961, pag. 125-132.

M. Borga-D. Palladino, *Oltre il mito della crisi*, La Scuola, Brescia, 1997, pag.69-77

5. L'antinomia di Richard (1905).
6. L'antinomia di Zermelo-König (1905).
7. (L'antinomia della denotazione (Russell, 1905).
8. L'antinomia di Berry (pubblicata da Russell, 1906).
9. L'antinomia di Grelling (Grelling-Nelson, 1908).
10. La pretesa antinomia del risvegliatore (Russell, 1918).
11. L'antinomia di Skolem (1923).
12. L'antinomia dell'analisi (G. E. Moore, 1942).

Al fine di avere una trattazione più coincisa e per la difficoltà dell'argomento tratterò solamente alcuni paradossi di carattere semantico e non logico.

Tra le numerose antinomie è impossibile, non citare quella del mentitore conosciuta fin dall'antichità.

Un uomo dice "Io sto mentendo". Se egli sta mentendo, allora ciò che dice è falso; e perciò egli non sta mentendo. Se egli non sta mentendo, allora ciò che dice è vero e perciò egli sta mentendo. In ogni caso egli sta contemporaneamente mentendo e non mentendo.³⁵

Un enunciato un po' più esplicito e meno semplicistico potrebbe essere il seguente:

La frase in corsivo che si trova nel paragrafo "Breve storia della matematica da Boole a Russell" e che incomincia con le parole "la frase in corsivo" è falsa.

Se tale frase è vera essa deve essere falsa e se è falsa allora essa deve essere vera.

Un altro paradosso interessante è quello del Barbiere espresso da Russell nel 1902. Un villaggio ha tra i suoi abitanti uno ed un solo barbiere, uomo ben sbarbato. Sull'insegna del suo negozio è scritto *"il barbiere rade tutti - e unicamente - coloro che non si radono da soli"*. La domanda a questo punto è: chi rade il barbiere? La risposta che siamo portati naturalmente a dare è *"il barbiere si rade da solo"*. Ma in questo modo violiamo una premessa: il barbiere rasandosi non raderebbe unicamente coloro che non si radono da soli. Allora viene spontaneo il pensare che il barbiere sarà raso da qualcun altro, ma ancora una volta si viola una premessa: che il barbiere rade tutti coloro che non si radono da soli (per dirla in altre parole, il barbiere se si rade da solo non dovrebbe radersi, se non si rade da solo dovrebbe radersi). Eppure il barbiere è ben sbarbato...

³⁵ Il paradosso del mentitore è molto simile, anche se non proprio equivalente, al *paradosso del cretese*, conosciuto fin dall'antichità. Il filosofo cretese Epimenide affermava: "tutti i cretesi sono mentitori". Se Epimenide diceva la verità, allora, essendo egli cretese, mentiva. Se mentiva, deve esserci al meno un cretese che non mente. Questo, comunque, non è logicamente impossibile.

In altre parole:

$$R = [x : x \notin x]$$

allora

$$x \in R \Leftrightarrow x \notin x$$

e

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Da notare che la definizione non è affatto contraddittoria, infatti Russell osservava che l'insieme delle tazzine da tè non è una tazzina da tè, dunque sta in R, mentre l'insieme delle cose che non sono tazzine da tè non è una tazzina da tè e conseguentemente non sta in R. Il problema e la contraddizione nasce quando ci si chiede se R stesso sta in R, oppure no.

Russell e Frege si illusero che l'errore commesso dal professore di Jena fosse rimediabile. Entrambi però si sbagliavano, infatti Russell nelle successive edizioni dei Principia Mathematica non riuscì a salvare in alcun modo la tesi logicista di Frege.

Dopo la scoperta delle antinomie di Russell, il problema della matematica venne affrontato in una diversa prospettiva da Hilbert, secondo il matematico di Königsberg la logica e la matematica dovevano essere sviluppate parallelamente.

Programma di Hilbert

Il programma che Hilbert propose è riassumibile in questi due punti:

1. Individuare un sistema assiomatico formale molto semplice tale che: a) la sua non contraddittorietà sia dimostrabile direttamente, senza ricorrere alla presunta non contraddittorietà di altri sistemi; b) la sua non contraddittorietà implichi quella di tutti i sistemi assiomatici formali con i quali si può ricostruire tutta la matematica classica;
2. Dimostrare la non contraddittorietà del sistema individuato con metodi di dimostrazione costruttivi, così che tutta la matematica sia al riparo dalle obiezioni degli Intuizionisti.

I limiti dei sistemi formali: Gödel e i teoremi d'incompletezza

Nel 1931 il matematico austriaco Kurt Gödel dimostrò nell'articolo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*³⁶ (Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia

³⁶ Quel "I" è dovuto all'iniziale intenzione di Gödel di pubblicare successivamente una seconda parte dell'articolo, in cui avrebbe dato le dimostrazioni rigorose di alcuni teoremi, tra cui anche quello di indimostrabilità della coerenza, che sono solo accennate. In realtà egli non pubblicò mai questa seconda parte. Gli storici e i biografi di Gödel attribuiscono tale mancata pubblicazione al successo con il quale fu accolto il primo articolo, che avrebbe, come dire, reso *superfluo* tornare ancora sull'argomento. In ogni caso rimangono

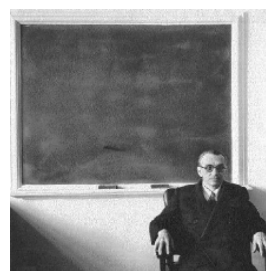
Mathematica e di sistemi affini I), due famosi teoremi che misero in crisi il programma hilbertiano, per la difficoltà dell'argomento mi limiterò solamente alla loro citazione.

Primo Teorema d'incompletezza³⁷

“In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula φ tale che, se T è coerente, allora né φ né la sua negazione $\neg\varphi$ sono dimostrabili in T .“

Con qualche semplificazione, il primo teorema afferma che:

In ogni formalizzazione coerente della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali — vale a dire, sufficientemente potente da definire la struttura dei numeri naturali dotati delle operazioni di somma e prodotto — è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema.



Secondo Teorema di incompletezza

“Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T .“



Semplificando:

Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.

Il secondo teorema di incompletezza di Gödel mostra dimostra che visto che nemmeno un sistema particolarmente semplice come quello dell'aritmetica elementare può essere utilizzato per provare la propria stessa coerenza, così, a maggior ragione, esso non può essere utilizzato per dimostrare la coerenza di sistemi più potenti.

Nonostante Gödel abbia tenuto a precisare, nell'introduzione al suo articolo, che i suoi teoremi non confutano il programma formalista, visto che in linea teorica l'esistenza di dimostrazioni finitiste di coerenza e di completezza *di altro genere* non si può escludere a priori, i suoi teoremi posero fine alle pretese formaliste di una matematica che si *autogiustifica*.

Dopo quasi un secolo la crisi dei fondamenti poteva definitivamente

molti dubbi sulle vere motivazioni che indussero il logico a non dare le versioni *definitive* delle sue dimostrazioni.

³⁷ http://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_di_incompletezza_di_G%C3%B6del

considerasi conclusa.

La filosofia della matematica, non è morta con i teoremi di Gödel
oggi i filosofi e matematici continuano a domandarsi che tipo di
esistenza hanno gli enti matematici, se la matematica poggia o no su
fondamenti saldi e quali potrebbero essere.

Sarebbe interessante addentrarsi in queste questioni, ma non è questa la sede
della loro trattazione.

BIBLIOGRAFIA

- A. Caforio, A. Ferilli, *Nuova Physica 2000 vol.F*, Le Monnier, 2000;
A. Einstein, *Relatività generale*, Newton, 2004 B. Mondadori, 1998;
B. Russell, *I principi della matematica*, Feltrinelli, 1977;
B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton, 1999;
C. Penco, *Matematica e gioco linguistico*, Le Monnier, Firenze, 1981;
D.R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi, 1979;
E. Agazzi e D. Palladino “*LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE e i fondamenti della geometria*”, Biblioteca della EST, Arnoldo Mondadori Editore, 1978;
E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano, 1961;
E.W. Beth, *I fondamenti logici della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963;
F. Cioffi, F. Gallo, G. Luppi, A. Vigorelli, E. Zanette, *Il testo filosofico*, Milano, 1998;
Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino, 1973;
I. Kant, *Critica della ragion pura*, Adelphi, 2003;
L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di matematica per licei sperimentali vol. 3B*, ETAS, Milano, 2003;
M. Borga-D. Palladino, *Oltre il mito della crisi*, La Scuola, Brescia, 1997;
M. Hack, P. Battaglia, R. Buccheri, *L'idea del tempo*, UTET Libreria, Torino, 2005;
P. Odifreddi, *C'era una volta un paradosso*, Einaudi, 2001;
P. Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, Einaudi, 2003;
Roger Penrose, *La strada che porta alla realtà*, BUR, 2004;
F. Speranza, *Scritti di epistemologia della matematica*, Bologna 1997.

SITOGRAFIA E ALTRE FONTI

www.wikipedia.it
www.vialattea.it
www.dif.unige.it/epi/hp/penco/pub/FREGE_gal.pdf
progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/frmset_benvenuto.htm
Microsoft® Encarta® 2007 [DVD]. Microsoft Corporation, 2006