Dario Celotto

Teoria dei Giochi

Liceo scientifico e classico Ettore Majorana – Classe 5° D

A.S. 2006/2007

Sommario

La presente relazione è il frutto di un lavoro condotto nel corso di quest'anno scolastico da parte di un gruppo di quattro studenti di diverse quinte (oltre a me, Davide Pignataro di 5° C, Jacopo Scalise e Davide Fossati di 5° I), svolto con la supervisione del prof. D. Ciceri.

Mentre lo scritto è integralmente opera mia, le idee che hanno permesso lo sviluppo dell'ultimo capitolo ("Studio di giochi") sono frutto del lavoro di tutti e quattro.

Introduzione

La teoria dei giochi è una branca della matematica nata molto recentemente, dato che il primo scritto sistematico sull'argomento, "Theory of Games and Economic Behaviour" di von Neumann e Morgenstern, risale solamente al 1944. Tuttavia i primi studi in proposito si devono a Cournot nella prima metà dell'Ottocento. Il matematico che ha dato un'ulteriore spinta alla teoria dei giochi è stato, nel 1951, John Nash, che con la sua tesi di sole 30 pagine ("Non-cooperative games") compie un passo in avanti, generalizzando i teoremi di von Neumann. Dopo un iniziale periodo di entusiasmo la Teoria dei Giochi cadde in disgrazia fino agli anni '80, quando divenne uno strumento fondamentale per l'analisi economica, tanto da valere il Nobel per l'economia a Nash nel 1994. Oltre che in economia la Teoria dei Giochi - e specialmente alcuni teoremi di Nash - venne utilizzata per l'analisi di situazioni di tipo militare durante la guerra fredda, e ultimamente i suoi campi di applicazione arrivano addirittura alla biologia.

La parola "giochi" in realtà è molto riduttiva, in quanto questa teoria si propone di analizzare ogni situazione di interazione strategica tra decisori. I giochi in senso letterale (scacchi, carte, ecc.) vengono usati come "palestre" per imparare a modellizzare interazioni economiche e sociali. Usualmente i giocatori sono considerati *intelligenti* e *razionali*. Per *intelligenti* si intende individui che comprendono la situazione in cui si trovano e in grado di fare ragionamenti logici di complessità indefinitamente elevata, mentre per *razionali* si intende che hanno preferenze coerenti (transitive) sugli esiti finali e che hanno l'obiettivo di massimizzare queste preferenze.

Essendo coinvolti più decisori l'esito finale di un gioco è determinato dalle scelte operate da ogni decisore.

Il problema delle preferenze dei decisori ci porta a una riflessione sul concetto di *utilità*.

Nella Teoria dei Giochi l'utilità è intesa come una caratteristica intrinseca dei soggetti e delle loro preferenze. L'utilità quindi è considerata una funzione definita sull'insieme degli esiti del gioco. Non importa quali siano le preferenze dei giocatori, basta che esse siano quantificabili. La funzione di utilità quindi non è necessariamente uguale per tutti i decisori, e può cambiare a seconda delle situazioni di gioco (ad esempio si pensi a un gioco in cui si desidera far vincere qualcun altro per farlo felice).

Sistemi di classificazione dei giochi

Prima di iniziare la trattazione vera e propria dei giochi è opportuno trovare dei criteri formali di classificazione.

1) Giochi cooperativi e giochi non cooperativi

La prima classificazione possibile è quella tra i giochi definiti *cooperativi* e quelli *non cooperativi*. Questa distinzione non implica il fatto che i decisori di giochi cooperativi siano più propensi ad atteggiamenti altruistici, infatti l'altruismo è già preso in considerazione nelle funzioni di utilità dei singoli. La cooperazione sta nella possibilità di stringere accordi vincolanti, ovvero accordi il cui rispetto è garantito (ad es. le leggi possono essere interpretate come accordi vincolanti tra individui, il potere giudiziario funge da garante per il rispetto delle leggi stesse). Al contrario i giochi non cooperativi sono quelli in cui non è possibile stringere accordi vincolanti.

2) Giochi a somma zero

Questo criterio di classificazione è applicato ai giochi a due giocatori. Un gioco è definito *a somma zero* se in ogni possibile risultato l'utilità di un giocatore è opposta a quella dell'altro.

3) Giochi a informazione completa

Un gioco è detto *a informazione completa* se le regole del gioco e le funzioni di utilità di ogni giocatore sono conoscenza comune di tutti i giocatori.

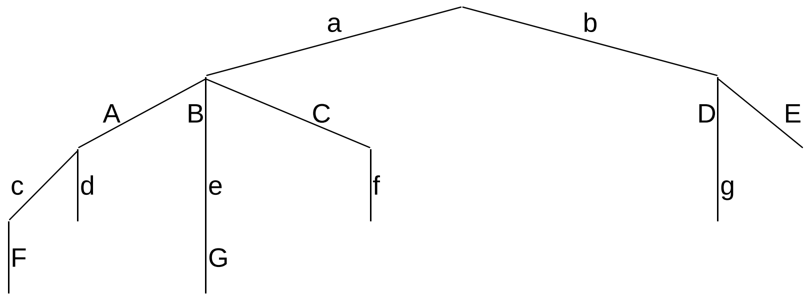
Metodi di rappresentazione dei giochi non cooperativi

Per operare una descrizione formale dei giochi non cooperativi si è soliti ricorrere a due modalità rappresentative: la *forma estesa* e la *forma strategica*.

Un gioco è descritto in forma estesa quando è rappresentato con un grafo ad albero, che partendo dalla situazione iniziale proceda mossa per mossa, fino a presentare ogni possibile situazione finale.

La forma strategica invece precisa il numero dei giocatori, le loro strategie e funzioni di utilità, essa si presenta sotto forma di bimatrice, che presenta i *payoff* (risultati) a seconda della strategia utilizzata da ogni giocatore. Per risalire alla forma strategica bisogna spesso partire dalla forma estesa, che, rappresentando ogni possibile configurazione, precisa le possibili mosse dei decisori e, di conseguenza, le strategie.

Ecco un esempio di gioco presentato in forma estesa.



Ci sono due mucchietti di due fiammiferi ciascuno. Due giocatori a turno tolgono un certo numero (>0) di fiammiferi tutti dallo stesso mucchietto. Chi toglie l'ultimo fiammifero perde.

Il primo giocatore (I) può o togliere uno o due fiammiferi da uno dei due mucchietti, formalmente può scegliere tra le mosse:

a) togliere un fiammifero da un mucchietto,
b) togliere due fiammiferi da un mucchietto.

A questo punto se I ha giocato la strategia (a), il secondo giocatore (II) può:

A) togliere un fiammifero dallo stesso mucchietto di I,
B) togliere un fiammifero dall'altro mucchietto,
C) togliere due fiammiferi dall'altro mucchietto.

se invece I ha giocato (b), può

D) togliere un fiammifero dal mucchietto rimanente,
E) togliere due fiammiferi dal mucchietto rimanente (e quindi vince I)

Per finire ecco cosa possono fare I e II per concludere il gioco (in proposito si guardi il grafo sottostante):

c) togliere uno dei due fiammiferi dal mucchietto rimanente
d) togliere entrambi i fiammiferi dal mucchietto rimanente (vince II)
e) togliere l'ultimo fiammifero da uno dei due mucchietti
f-g) togliere l'ultimo fiammifero (vince II)
F-G) togliere l'ultimo fiammifero (vince I)

(come per le prime due mosse le lettere minuscole descrivono le mosse di I, mentre le maiuscole quelle di II)

Si può inoltre evidenziare che questo gioco, giocato tra decisori intelligenti e razionali, porta invariabilmente II a vincere, infatti se I gioca (a), II può giocare (C) e vincere quando I fa la mossa (f), se invece I gioca (b), II gioca (D), vincendo il turno successivo.
Evidentemente è più facile lavorare su un gioco in forma strategica, ma è molto più difficile essere in grado di rappresentarlo (poiché spesso non si conoscono le strategie dei giocatori). Un celebre gioco di cui parlerò presto, il cosiddetto "Dilemma de prigioniero", si presenta, in forma strategica, così:

I/II	C	NC
C	(-5,-5)	(-1,-6)
NC	(-6,-1)	(-2,-2)

Soluzioni di giochi

Per *soluzione* di un gioco si intende trovare l'esito a cui questo gioco porta. Si ricorda che bisogna considerare razionali ed intelligenti i due (o più) decisori, altrimenti gli esiti sarebbero i più disparati.
Qui sono esposti i metodi più efficaci di risoluzione dei giochi a due giocatori.

Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

Se i decisori si trovano davanti a strategie che per qualunque scelta dell'avversario portano a un payoff minore si dice che quelle strategie sono *strettamente dominate*, ovvero il giocatore non ha nessun interesse a seguire tale strategia. Eliminando via via tali strategie si arriva ad un'unica soluzione, come negli esempi che seguono.
Questo gioco (rappresentato in forma strategica) è a somma zero, quindi è inutile scrivere i payoff del secondo giocatore, che saranno evidentemente di segno opposto rispetto a quelli del primo. Le strategie che può scegliere I verranno da qui in avanti indicate con s_1, s_2, …, s_i; le strategie di II invece saranno t_1, t_2, …, t_i.

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

Poiché l'assunto è che i giocatori siano razionali il primo non ha nessun motivo per usare la sua strategia s_2, che può essere eliminata. La matrice quindi si presenterà così:

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_3	9	-1	3

Analogamente il secondo può eliminare la colonna t_1 (tenendo conto che l'obiettivo de secondo giocatore è minimizzare i guadagni del primo)

I/II	t_2	t_3
s_1	3	4
s_3	-1	3

Continuando così I può eliminare s_3 e II t_3, quindi (s_1, t_2) è la soluzione.

Ecco il "Dilemma del prigioniero" (il gioco citato poco sopra), probabilmente il gioco più famoso per l'esito inaspettato a cui porta questo metodo di soluzione. Formalmente questo è considerato un gioco non cooperativo a due giocatori non a somma zero.
Due individui I e II vengono arrestati per lo stesso reato e vengono interrogati separatamente dal giudice. Ognuno può scegliere indipendentemente dall'altro di confessare (C) o di non confessare (NC). Se entrambi confessano vengono condannati a 5 anni di prigione ciascuno, se nessuno dei due confessa vengono condannati per reati minori a due anni ciascuno, infine se uno dei due confessa e l'altro no, quello che confessa ha uno sconto di pena e viene condannato a un anno, mentre l'altro viene condannato a 6 anni. In forma strategica il gioco si presenta così:

I/II	C	NC
C	(-5,-5)	(-1,-6)
NC	(-6,-1)	(-2,-2)

Risulta quindi che entrambi hanno convenienza a confessare, perché così saranno condannati a 1 o 5 anni, contro i 2 o 6 che rischiano in caso contrario. Quindi se i due individui sono intelligenti e razionali confessano, venendo così condannati a 5 anni ciascuno. Però la possibilità (NC), (NC) sarebbe migliore, perché porterebbe a una pena minore per entrambi! Questa apparente incongruenza è dovuta all'impossibilità di stringere accordi vincolanti perché nessuno dei due avrebbe la garanzia del rispetto dell'accordo da parte dell'altro. Questo schema, rivedendo opportunamente le strategie e i payoff dei due giocatori, potrebbe anche presentare (da un punto di vista puramente economico) le scelte che hanno portato USA e URSS alla corsa agli armamenti. Le possibili strategie diventano armo o disarmo nucleare. La prima porta di sicuro ad una immediata perdita economica, ma può garantire la "vittoria" della guerra fredda, mentre la seconda, più economica, porta alla sconfitta. Il risultato del "gioco" (quello che sopravvive all'eliminazione iterata di strategie dominate) è stata la corsa agli armamenti.

Tuttavia, addentrandosi nello studio della teoria dei giochi ci si rende conto che i casi in cui si può applicare questo metodo sono una ristretta minoranza (infatti è piuttosto raro che si presentino strategie strettamente dominate). Von Neumann si accorse di ciò e inventò un metodo per risolvere i giochi che non rispondono alle caratteristiche richieste per applicare il metodo dell'eliminazione di strategie dominate.

Il metodo MaxMin/MinMax

Quando non ci sono strategie strettamente dominate, il primo giocatore può cercare di adottare la strategia che lo porterebbe a perdere il meno possibile (ovvero il massimo dei minimi, abbreviato *MaxMin*), in questo caso si dice che adotta la sua *strategia conservativa*.

Analogamente il secondo giocatore può scegliere la strategia che lo porta a pagare di meno, quindi tra i massimi del primo giocatore (ricordiamo che il gioco è a somma zero) e sceglierà il minore tra di essi (ovvero il minimo dei massimi, abbreviato *MinMax*), adottando anche lui la sua strategia conservativa.

Le strategie conservative rappresentano ciò che ciascun giocatore può procurarsi indipendentemente dall'altro. Se il MaxMin del primo giocatore viene a coincidere con il MinMax del secondo, ovvero ciò che può garantirsi il primo è ciò che il secondo è disposto a pagare, allora la soluzione si dice *stabile* perché nessuno dei due ha interesse a cambiarla. Le strategie che portano ad una soluzione stabile sono dette *strategie pure*.

Esempio: un gioco in cui è presente una soluzione stabile rilevabile con il metodo MaxMin/MinMax

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	-5	5	0
s_2	2	-2	1
s_3	4	3	2

Risulta subito evidente che non ci sono strategie strettamente dominate né per il primo giocatore, né per il secondo, però le strategie s_3 (per il primo) e t_3 (per il secondo) sono conservative e la soluzione (2) costituisce il MinMax = MaxMin.
Però neanche questo metodo risolve tutti i giochi e anzi non risolve la maggior parte di essi.

MinMax con strategie miste

Vediamo ad esempio questo gioco:

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	0	1	2
s_2	1	4	-1
s_3	3	-1	0

In questo caso il MaxMin è 0, mentre il MinMax è 2: il primo si può garantire un guadagno 0, mentre il secondo è disposto a pagare 2. Il risultato sembrerebbe essere 2, ma chiaramente il secondo giocatore non è contento, perché sa che il primo si accontenterebbe di 0. Allora potrebbe giocare t_1 per pagare 0, ma allora il primo giocherebbe s_3 per guadagnare 3, e via di seguito. Evidentemente ci troviamo di fronte a un gioco che non ha soluzioni stabili.
Poiché nella realtà spesso non è possibile arrivare a una soluzione stabile entrano in gioco le cosiddette *strategie miste*, con le quali i giocatori usano le strategie a loro possibili con un frequenza dettata da una probabilità atta a massimizzare il proprio utile (o a minimizzare quello dell'avversario).
Se il gioco non ammette soluzioni stabili infatti applicare sempre la stessa strategia per vincere rende il gioco estremamente prevedibile, permettendo all'altro giocatore di cambiare strategia e guadagnarci. Di conseguenza a ogni strategia verrà associata una probabilità (p) ed essa verrà giocata con quella frequenza. Così facendo abbiamo ampliato a dismisura lo spazio delle strategie.

Ora analizziamo uno di questi casi, in cui le strategie possibili siano solo due.

I/II	t_1	t_2
s_1	1	-1
s_2	-1	1

Possiamo facilmente constatare che in questo gioco non ci sono soluzioni stabili, quindi converrà utilizzare una strategia mista.

Il giocatore I giocherà la prima strategia con probabilità p (la seconda verrà ovviamente giocata con probabilità 1-p) e analogamente il giocatore II (la prima strategia verrà giocata con probabilità q e la seconda con probabilità 1-q).

Calcoliamo quindi il payoff del primo giocatore dopo una serie (teoricamente infinita) di partite:

$f(p, q) = pq \times 1 + p(1-q) \times (-1) + q(1-p) \times (-1) + (1-p) \times (1-q) \times 1 = (2p-1)(2q-1)$

Naturalmente il payoff atteso del secondo è opposto.

Ora si possono facilmente calcolare il Max(p)Min(q) e il Min(q)Max(p) e trovare lo stesso valore: 0, verificato per p'= q'=1/2 (data la simmetria del gioco potevamo sospettare la simmetria delle soluzioni). Se uno dei due giocatori decide di usare questa strategia mista, l'altro non può far nulla per contrastarlo, perché qualunque cosa faccia si procurerà lo stesso o meno rispetto al profitto che avrebbe se il suo avversario non usasse questa strategia mista.

Per formalizzare la questione possiamo dire che:

Si possono indicare con X l'insieme delle strategie miste di I e con Y l'insieme delle strategie miste di II.

<u>Teorema del MinMax</u> (von Neumann, 1928)

Ogni gioco finito a somma zero e a due giocatori in strategie miste soddisfa la proprietà che MaxMin=MinMax. I valori delle distribuzioni di probabilità che realizzano il MaxMin=MinMax non sono necessariamente unici, ma se (p', q') e (p", q") realizzano il MaxMin=MinMax, allora f(p', q') = f(p",q") = f(p', q") = (p", q') e inoltre f(p, q') ≤ f(p', q') ≤ f(p', q) per ogni altra coppia di distribuzione di probabilità p e q.

Si può inoltre notare che il metodo MinMax è una generalizzazione del metodo dell'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate e che applicando questo nuovo metodo a tutti i giochi risolvibili con quello vecchio si trova la stessa soluzione.

Equilibrio di Nash

Il grande merito di Nash fu quello di generalizzare il concetto di equilibrio anche ai giochi non a somma zero. L'idea di Nash parte dal fatto che è vero che il risultato del gioco dipende da quello che fanno entrambi i giocatori, ma se I sa cosa fa II, allora il risultato dipende solo da lui e simmetricamente per II. Una coppia di strategie è quindi accettabile se nessuno dei giocatori ha interesse a deviare unilateralmente.

In maniera più formale possiamo dire:

Equilibrio di Nash (Nash, 1950)

Consideriamo il gioco: $(X, Y, f, g, X \times Y \rightarrow R)$

dove X e Y sono gli spazi delle strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(p', q') \in X \times Y$ si dice equilibrio di Nash se

1) $f(p', q') \geq f(p, q') \; \forall x \in X$ e
2) $g(p', q') \geq g(p', q) \; \forall y \in Y$

Cournot, con il suo celebre esempio di duopolio aveva anticipato le conclusioni che Nash formalizzerà con i suoi teoremi, tanto che inizialmente ci si riferiva a questo equilibrio come "equilibrio di Cournot-Nash". L'equilibrio di Nash è inoltre una generalizzazione del metodo MinMax di von Neumann, infatti nei giochi a somma zero se p' e q' realizzano il MinMax = MaxMin, sono anche equilibri di Nash.

Un altro grande merito di Nash fu il fatto di aver dimostrato con un teorema (che porta il suo nome) che il concetto di equilibrio da lui introdotto è riscontrabile in una grandissima quantità di giochi.

Tuttavia questa concezione di equilibrio ha ancora un limite molto importante: si riferisce solo ai giochi a informazione completa, quindi solo a situazioni semplificate rispetto alla realtà.

Teoria delle aste

La teoria delle aste è una sottoclasse della teoria dei giochi e dimostra quanto essa sia versatile, adattandosi all'analisi di situazioni che sembrano non avere nulla a che fare l'una con l'altra. Le aste, soprattutto con l'avvento di Internet, sono una forma di vendita e di acquisto sempre più diffusa e anche la Borsa valori, con la sua compravendita di azioni, si basa sul meccanismo delle aste. Nonostante il fatto che esse siano diffuse sin dall'antichità, la prima opera accademica in proposito è la tesi di L. Friedman, del 1955. Questo lavoro è basato sulle strategie adottate da parte delle imprese in occasione della vendita dei diritti di trivellazione petrolifera nel Golfo del Messico. Erano aste “al primo premio in plico chiuso”: in questa procedura le offerte non sono rese pubbliche, l’offerta più alta vince l’asta e l’impresa che vince è tenuta a pagare ciò che ha offerto. Il guadagno quindi è dato dalla differenza (v – b), dove (v) è la valutazione dell’oggetto messo all’asta e (b) è l’offerta che si dà. Questa differenza deve essere moltiplicata per la probabilità P(b) di vincere l’asta con quella offerta, quindi la speranza di guadagno è (v – b) x P(b). L’obiettivo dei compratori è quindi trovare un’offerta (b’) che massimizzi la speranza di guadagno. Questo metodo tuttavia è estremamente intuitivo.

Nel 1961 William Vickrey (Nobel per l’economia nel 1996) analizzò il problema facendo appello alla teoria dei giochi. Questo approccio lo portò alla ricerca degli equilibri di Nash presenti nelle aste, generalizzando tale idea alle situazioni dove l’informazione è incompleta (infatti i giocatori non conoscono le valutazioni degli avversari). L’equilibrio così trovato è detto *equilibrio di Nash bayesiano*, che permette di trovare le strategie S che associno a ogni possibile valutazione (v) l’offerta (b’) che massimizza la speranza di guadagno. L’aggettivo “bayesiano” deriva da T. Bayes, matematico inglese del XVIII secolo: in probabilità e statistica il punto di vista bayesiano consiste nel valutare probabilità sulla base dell’informazione parziale disponibile e delle opinioni a priori.

Ciò che Vickrey analizzò a livello intuitivo fu poi reso rigoroso dagli articoli di un altro matematico, John Hrsanyi, pubblicati nel 1968. Questi scritti gli valsero il Nobel per l’economia nel 1994 insieme a Nash.

Nell’ambito delle ipotesi della teoria delle aste così costruita Vickrey dimostrò il *teorema dell’equivalenza dell’introito*. Questo teorema prova che le procedure d’asta al primo, al secondo premio (il vincitore dell’asta –cioè chi ha offerto il prezzo più alto- non paga che il secondo prezzo proposto) in plico chiuso sono equivalenti per il venditore. La procedura d’asta al secondo premio in busta chiusa è nota come *asta di Vickrey*.

In una asta al primo premio l’equilibrio consiste nell’offrire meno di quanto si valuta il lotto (bisognerà pur guadagnarci qualcosa), in una al secondo premio invece bisognerebbe offrire quanto si pensa che valga il lotto (dato che se si vince comunque si paga meno). Il teorema di equivalenza si estende anche a molti altri casi. Un caso interessante è quello costituito dalle aste al terzo premio in plico chiuso, infatti l’equilibrio di questa procedura sta nell’offrire più di quanto si valuta il lotto!

Giochi con strategie complesse

Come è già stato detto nella maggior parte dei casi non si conosce la forma strategica dei giochi. Questo molto spesso accade per l'incredibile complessità dei giochi stessi; un gioco come gli scacchi, ad esempio, comporta una quantità di scelte tali da non rendere possibile l'individuazione di una strategia vincente. Per studiare quindi tali giochi ci si affida alle enormi possibilità di calcolo del computer, che riesce a valutare una grande quantità di configurazioni in poco tempo. I problemi che si pongono ai programmatori sono di rendere il computer un giocatore razionale ed intelligente e, in secondo luogo, la ricerca di una efficace funzione di valutazione. Quest'ultimo è il problema principale se si vuole che il computer analizzi situazioni di tipo militare o economico, mentre è relativamente più semplice quando ci si trova davanti a giochi veri e propri.

Il primo problema invece viene risolto con un algoritmo MinMax, supponendo che l'altro giocatore (o gli altri giocatori) sia razionale e intelligente.

A questo algoritmo si affianca la potatura alfa-beta, un metodo utilizzato per snellire il volume di calcoli e rendere così possibile una ricerca più approfondita.

Applicazione di un algoritmo MinMax

Nei giochi complessi non si può dimostrare l'esistenza di una strategia dominante a causa dell'enorme mole di scelte possibili. Data questa difficoltà la cosa migliore è trovare una "buona" mossa con una ricerca in profondità tra le mosse possibili.

È possibile attuare valutazioni su uno o più stadi.

<u>Valutazione a uno stadio</u>

Partendo dalla situazione attuale si generano tutte le situazioni successive e gli si dà un valore in base alla funzione di valutazione, poi si sceglie la migliore (in questo modo si massimizza).

<u>Valutazione a due stadi</u>

Il giocatore deve valutare tutte le mosse che l'avversario può fare in conseguenza di ciascuna delle proprie mosse possibili e successivamente vedere qual è la migliore per lui (e quindi la peggiore dal proprio punto di vista). Infine dare quest'ultimo valore alla propria mossa. Il caso migliore è quello con valore più alto, cioè il massimo dei minimi.

Il pre-requisito per il successo di tale algoritmo è trovare una buona funzione di valutazione.

Ovviamente è possibile continuare su più stadi, utilizzando la stessa tecnica. L'ideale sarebbe poter andare avanti all'infinito, il che soddisferebbe pienamente la definizione di intelligenza nella Teoria dei Giochi.

La potatura alfa-beta

La potatura alfa-beta è una tecnica che consente di ridurre, in alcuni casi in maniera consistente, il numero di configurazioni da analizzare durante la procedura MinMax.

Esso si basa sull'introduzione di due parametri α e β con $\alpha \leq \beta$ nella funzione di valutazione f(x). La nuova funzione $f(x, \alpha, \beta)$ deve restituire il valore f(c) di una configurazione se esso è compreso tra α e β, ma non siamo interessati al suo vero valore se esso è al di fuori dell'intervallo. In tal caso ci accontentiamo di ottenere un qualunque valore $\leq \alpha$ o $\geq \beta$ (rispettivamente nei casi che f(c) sia a sinistra o a destra dell'intervallo).

Ad esempio possiamo pensare di dover massimizzare il risultato di f(x). Consideriamo quindi in ordine tutte le configurazioni c_1, c_2, …, c_n. Iniziamo col valutare c_1: se $f(c_1)$ risulta $\geq \beta$ è inutile andare avanti valutando le altre, perché il massimo ottenuto alla fine sarebbe sicuramente maggiore o uguale a $f(c_1)$, e quindi a β. Se invece $f(c_1)$ è inferiore a β potremo sostituire questo ad α, restringendo l'intervallo (ovviamente dovendo massimizzare potremo eliminare tutti i valori inferiori ad α). Questo ragionamento funziona anche quando dovremo calcolare i minimi. La vera potenza del metodo sta nel fatto che l'intervallo è di sicuro convergente, quindi permette una veloce sfrondatura di un ampio numero di soluzioni.

Naturalmente all'inizio la funzione dovrà essere invocata con $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$. Bisogna inoltre notare che l'efficacia della potatura alfa-beta dipende dall'ordine in cui si valutano le configurazioni successive: per sfrondare il maggior numero di configurazioni è infatti opportuno iniziare con quelle che hanno la maggior possibilità di essere vincenti.

Studio di giochi

Dopo aver opportunamente studiato la teoria abbiamo analizzato alcuni giochi di complessità crescente, partendo dal tris (o filetto) fino ad arrivare al go-moku, un gioco dalle regole molto semplici e simile a una versione avanzata del tris, infatti l'obiettivo è riuscire a accostare 5 dei propri simboli (cerchi o croci) in una griglia che può essere o quella del gioco orientale del go (quindi 19 x 19) o infinita. Da un punto di vista formale si tratta di giochi non cooperativi a somma zero (quindi a due giocatori).

Il tris

Il primo passo è stato la trattazione del tris (o filetto). Dopo una accurata analisi è stato possibile trattare in forma estesa una versione del filetto in cui uno dei due giocatori veniva assunto come razionale, quindi utilizzava un funzione di valutazione nota e si basava sul Minmax per determinare le sue mosse. Ovviamente questo giocatore risulta vincente nella quasi totalità delle possibilità, tranne quando pareggia. Infatti è facilmente dimostrabile, grazie alla semplicità del gioco, che esso, giocato tra due decisori intelligenti e razionali, finisce sempre in pareggio, in quanto quella è la soluzione che "sopravvive" se i giocatori utilizzano le loro strategie dominanti.

Questa è la rappresentazione semplificata in forma strategica del tris. Le strategie dominanti per i due giocatori sono s_1 e t_2, mentre s_2 e t_1 rappresentano ogni altra strategia del primo e del secondo giocatore.

I/II	t_1	t_2
s_1	1	0
s_2	0	-1

Per giungere a questa conclusione abbiamo utilizzato una funzione di valutazione f(x) che si basa sul numero di righe, colonne e diagonali complete ancora aperte al giocatore meno il numero di righe, colonne e diagonali complete ancora aperte all'avversario. Nel caso che invece la mossa sia necessaria per evitare che l'avversario vinca il turno successivo, la funzione di valutazione assume valore $+\infty$

Quindi, dati due giocatori razionali, una partita tipo si svolge così:

	X	

$f_x = 8 - 4 = 4$

		O
	X	

$f_o = 4 - 5 = -1$

		O
	X	
		X

$f_x = 5 - 2 = 3$

O		O
	X	
		X

$f_o = +\infty$

O	X	O
	X	
		X

$f_x = +\infty$

O	X	O
	X	
	O	X

$f_o = +\infty$

O	X	O
X	X	
	O	X

$f_x = 1 - 0 = 1$

O	X	O
X	X	O
	O	X

$f_o = +\infty$

O	X	O
X	X	O
X	O	X

Forza 4

Successivamente abbiamo studiato un gioco simile al conosciuto gioco "Forza 4", quindi introducendo il concetto di una sorta di "gravità" che obbliga a riempire prima le caselle inferiori, però usando uno schema di sole 4 caselle per 4. Tuttavia è stato subito evidente che il gioco si conclude con un pareggio (infatti è possibile con sole quattro caselle opportunamente occupate bloccare ogni possibilità di vittoria dell'avversario).

X			
			X
		X	
	X		

Go-moku semplificato

Il passo successivo è stato studiare un go-moku semplificato, ovvero un gioco dove l'obiettivo è mettere 4 simboli in fila in una griglia 7 x 7.

Per prima cosa abbiamo cercato una funzione di valutazione efficace. La funzione che abbiamo utilizzato tiene conto di tutte le configurazioni finali che coinvolgono quella casella, quindi consiste nel numero di 4 che è possibile fare "contenenti" tale casella (in secondo luogo si potranno considerare anche il numero di 4 che può fare l'avversario contenenti quella casella). Questo lavoro porta a delle conclusioni in parte già intuibili in base ai ragionamenti sul tris; infatti la casella con il migliore punteggio per la prima mossa è quella centrale, mentre per il secondo giocatore quelle in diagonale rispetto ad essa hanno il punteggio più elevato. Tuttavia ragionando su più stadi ci si accorge del fatto che il primo giocatore ha la possibilità di vincere indipendentemente dalle mosse del secondo.

Ora presento una partita tipo a questo gioco. I numeri vicino ai simboli mostrano l'ordine delle mosse, mentre i punti esclamativi distinguono le mosse fatte per evitare che l'avversario possa mettere in fila tre suoi simboli senza che nessuna delle due estremità della fila sia occupata (è visibile che queste mosse costituiscono la maggior parte delle mosse totali).

			$X_{5!}$			
		$X_{7!}$	$O_{6!}$	O_2		
	X_9		X_1	X_3	$O_{4!}$	
				$O_{8!}$		

Si può facilmente capire che adesso "O" può riempire solo una delle tre caselle che portano "X" a vincere il suo turno successivo.

La differenza tra il go-moku e questa versione semplificata è la facilità con cui si arriva a una configurazione finale. Infatti l'obiettivo del go-moku può essere anche pensato come "mettere in fila quattro simboli senza che nessuno dei due capi della fila sia occupato dai simboli dell'avversario", che è molto più difficile che riuscire a fare la stessa cosa con tre simboli. A causa di questa apparentemente piccola ma fondamentale differenza tra go-moku e questo gioco (non è stato ancora possibile decretare se nel go-moku uno dei due giocatori ha la possibilità di vincere indipendentemente dalle mosse altrui, ed è proprio per questo che è ancora interessante giocarci), quest'ultimo non porta a nessuna conclusione interessante.

Go-moku

La trattazione del problema è molto più complessa di quello che sembra, infatti non è possibile rappresentare il gioco né in forma estesa – a causa della sterminata possibilità di mosse – né, di conseguenza, in forma strategica, in quanto non si conoscono gli spazi delle strategie dei due decisori.

Per quanto riguarda questo gioco trovare una funzione di valutazione diviene molto più difficile; infatti utilizzando la funzione usata per la sua versione semplificata in uno schema 19 x 19 risulta che per la prima mossa le caselle del quadrato 11 x 11 centrale hanno tutte lo stesso punteggio. Non parliamo poi del caso in cui si giochi su un campo infinito, dove tutte le caselle sarebbero equivalenti. La funzione si può basare solo sulle caselle già utilizzate e quindi o sulla possibilità di mettere in crisi l'avversario o sulle risposte alle sue mosse.

Dopo aver giocato svariate volte a questo gioco, è risultato che la maggior parte delle mosse dopo le prime è dettata da 5 motivi; eccoli in ordine di importanza:

1) mettere in fila 5 dei propri simboli, ovvero vincere;
2) chiudere i 4 dell'avversario per evitare che egli vinca il turno successivo;
3) fare 4, sia "aperti" (ovvero liberi da simboli avversari ad entrambe le estremità), sia "chiusi" (ovvero liberi da simboli dell'avversario solo ad una estremità). Infatti i 4 aperti permettono di vincere sicuramente il turno successivo, mentre i 4 chiusi obbligano l'avversario (se non vuole perdere) a usare la sua mossa per chiuderli da tutte e due le parti;
4) chiudere i 3 aperti dell'avversario. Infatti essi hanno la possibilità di divenire 4 aperti, che porterebbero l'avversario alla vittoria;
5) fare 3 aperti, per lo stesso motivo per cui bisogna chiuderli.

Queste sono le motivazioni della stragrande maggioranza delle mosse dal quinto/sesto turno in poi; infatti su una scacchiera di grandi dimensioni è impossibile evitare la creazione di 3 aperti (questo è il motivo per cui sulla scacchiera 7 x 7 l'esito è scontato), che sono la prima fase di tutte le mosse descritte sopra.

Un esperimento è stato giocare una partita durante la quale uno dei giocatori segue solamente queste priorità, giocando a caso dove non è possibile farlo, mentre l'altro gioca come fa normalmente, valutando tutte le possibilità che lo porterebbero a giocare una mossa piuttosto che un'altra (possibili 2 aperti, etc.). Il risultato di questa esperienza è in parte prevedibile e in parte sorprendente. Infatti se da una parte vince sempre il giocatore che compie ragionamenti più complessi, tuttavia egli impiega svariate mosse (tra le 20 e le 40) per far valere la sua intelligenza. Questa differenza può essere via via diminuita utilizzando una ricerca in profondità con un algoritmo MinMax, eventualmente aiutato dalla potatura alfa-beta.

Appendice

Teorema di Nash

(Nash, 1950)

Siano X e Y gli spazi delle strategie rispettivamente del primo e del secondo giocatore.

Siano f e g le funzioni di utilità rispettivamente del primo e del secondo giocatore.

Siano X e Y sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di R^n, f e g funzioni continue, inoltre valgano le seguenti proprietà:

$x \rightarrow f(x,y)$ è quasi concava* per ogni y fissato

$y \rightarrow g(x,y)$ è quasi concava per ogni x fissato

Allora esiste almeno un equilibrio di Nash.

*Una funzione h di una variabile si dice quasi concava se per $\forall\ k \in R$, l'insieme

$A_k = \{x \ \ h(x) \geq k\}$

è convesso.

Scacchi e dama

Nel caso della dama e degli scacchi è stato dimostrato matematicamente che il giocatore che inizia ha la possibilità di vincere sempre, ma non è ancora stata trovata la strategia che lo consente a causa dello sconfinato grafo ad albero a cui ci si trova davanti analizzando tali giochi. Infatti questi grafi hanno una quantità di nodi dell'ordine di 10^{40} per la dama e di 10^{120} per gli scacchi. Per questo i programmatori di "Deep Blue", il computer che viene opposto ai campioni di scacchi, si sono dovuti "accontentare" di un programma che sfruttasse una valutazione MinMax a una decina di stadi (usando la potatura alfa-beta per snellire il volume di situazioni da valutare).

Quando verrà trovata la strategia "dominante" diventerà molto meno interessante giocare a scacchi, soprattutto contro un computer capace di memorizzarla perfettamente.

Bibliografia

Boldi, Paolo [2002]: La strategia MinMax e le sue varianti

Cournot, A. Augustin [1838]: Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses

Hrsanyi, John C. [1968]: Games with incomplete information played by Bayesian players

Laffont, Jean Jacques []: Come razionalizzare le vendite all’asta?

Nash, John F. Jr. [1951]: Non-cooperative Games

Patrone, Fioravante [2004]: La maledizione del vincitore

Patrone, Fioravante [2005]: Breve introduzione alla Teoria dei Giochi

Torre, Anna [2006]: Matematica per le interazioni strategiche: Teoria dei giochi

von Neumann, John e Oskar Morgenstern [1944]: Theory of Games and Economic Behaviour