

LICEO SCIENTIFICO STATALE CON ANNESSA SEZIONE CLASSICA
“FILIPPO JUVARRA”
VIA BUOZZI 16, 10078 VENARIA REALE (TORINO)

LA SPIRALE MERAVIGLIOSA

in matematica e in natura



Esame di Stato 2007/2008

Classe V sez. C

DE FUSCO LUCIO

Tesina di Maturità

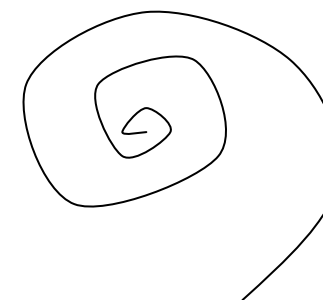
Indice

Introduzione

L'approfondimento tratterà di una particolare curva matematica, la spirale logaritmica, definita dal matematico Jakob Bernoulli “*meravigliosa*”.

Dopo lo studio analitico (§ 1.), si faranno alcuni riferimenti alla presenza *tendenziale* della spirale “meravigliosa” in natura (§ 2.), con particolare attenzione alle galassie a spirale, e nelle arti (§ 3.).

Il lavoro è stato stimolato da un interesse personale per le Scienze e da una buona dose di curiosità, per osservare meglio il mondo che ci circonda.



Appendici

Il “*De infinitis spiralibus*” di Torricelli
Sull'equazione della spirale logaritmica
La sezione aurea nella spirale
La costruzione della spirale logaritmica
Studio della spirale logaritmica tridimensionale
La moderna classificazione delle galassie
Apparato iconografico

Bibliografia e sitografia

Conclusioni

p. 25

3. La spirale ‘meravigliosa’ nelle Arti

p. 21

1. La spirale ‘meravigliosa’ in Matematica

p. 3

- 1.1 Le curve spirali
- 1.2 La spirale logaritmica e le sue proprietà
- 1.3 Frattali, problemi e realtà

2. La spirale ‘meravigliosa’ nelle Scienze p. 13

- 2.1 In Biologia e Scienze della Terra
- 2.2 In Astrofisica



La spirale ‘meravigliosa’ in Matematica



“La matematica si può considerare come ciò che unisce
e si interpone fra l’Uomo e la Natura, fra il mondo
esterno e quello interno, fra il pensiero e la percezione.”

F. W. August Fröbel (1782-1852)

1.1 LE CURVE SPIRALI

Una *spirale* è una curva asimmetrica aperta generata da un punto che si arrotola intorno ad un’origine fissa, detta *polo*, aumentando (o diminuendo, secondo il verso) in modo continuo la distanza da essa. La curva spirale è dunque la traiettoria disegnata da un punto P mobile su una semiretta che ruota attorno al suo centro O; *OP* è detto *raggio vettore* (r) della spirale e i tratti curvilinei sono detti *spire*. Le curve spirali si differenziano in bidimensionali e tridimensionali (ad esempio l’elica o il vortice, [fig. 1](#)).

In particolare la spirale bidimensionale più comune è quella uniforme, detta *di Archimede* (o anche *evolvente*), definita come la traiettoria descritta da un punto che si muove con velocità uniforme su una semiretta che ruota uniformemente intorno al polo ([fig. 2](#)). Tuttavia nell’universo delle spirali bidimensionali, oltre alla spirale uniforme, particolare è la spirale logaritmica, anche chiamata *meravigliosa* (§ 1.2.).

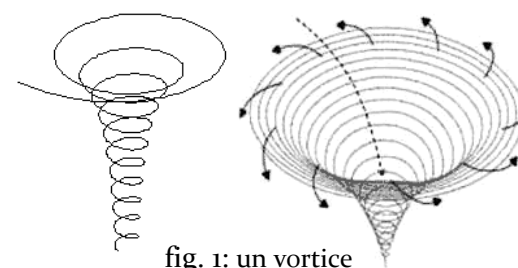


fig. 1: un vortice

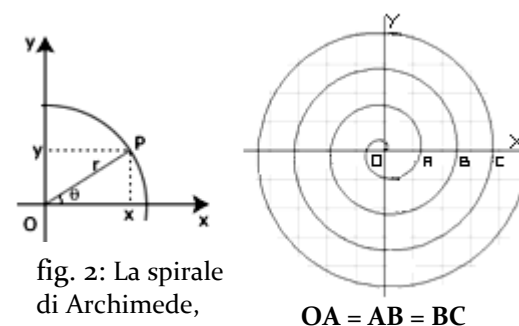


fig. 2: La spirale
di Archimede,

$$OA = AB = BC$$

1.2 LA SPIRALE LOGARITMICA E LE SUE PROPRIETA'

La spirale logaritmica fu studiata per la prima volta nel 1638 da **René Descartes** (1596 – 1650): “(...) è detta spirale logaritmica ogni figura piana che proceda da un punto fisso tale che l'area vettoriale di qualsiasi settore sia sempre una proporzione aggiunta della figura precedente”.

Il matematico svizzero **Jakob Bernoulli** (1654 – 1705) definì la curva “*Spira mirabilis*”, la spirale meravigliosa, disponendo che essa fosse scolpita sulla sua tomba accanto alla frase “*Eadem mutata resurgo*”, ovvero “sebbene diversa, rinasco ugualmente”. In onore al matematico la curva viene anche chiamata *di Bernoulli*. Per quanto riguarda la pietra tombale sfortunatamente lo scalpellino incise una spirale uniforme (fig. 3).

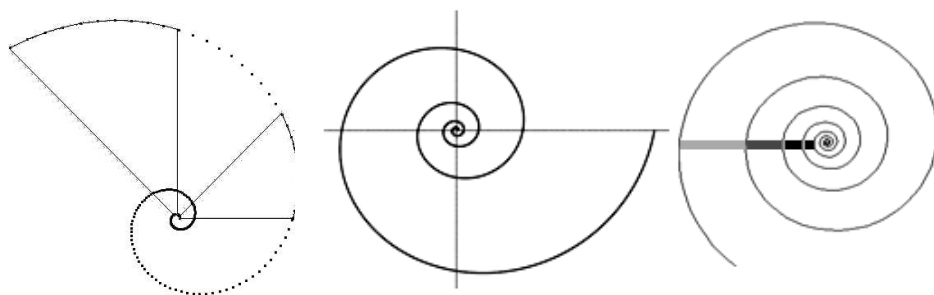


fig. 4a: la spirale meravigliosa



fig. 3:
l'incisione
sull'epitaffio
di Bernoulli,
a Basilea.

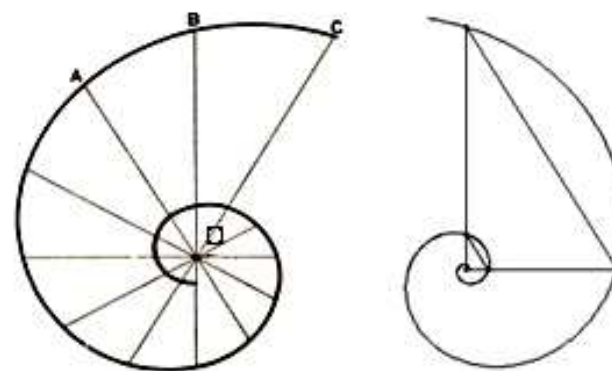


La spirale logaritmica (fig. 4) è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine. Il *passo* della spira mirabilis, ovvero il segmento di distanza tra spire successive, a differenza della spirale di Archimede, non è costante.

La spirale logaritmica è definita *proporzionale*: ogni raggio vettore sarà più ampio del precedente secondo un rapporto costante, facendo sì che la curva crescendo non cambi forma. In particolare le distanze tra i bracci della spirale aumentano secondo una progressione geometrica, per questo talvolta la curva è chiamata spirale *geometrica o proporzionale* (fig. 4).

La spirale proporzionale non raggiunge mai il polo, poiché il centro della spirale è un punto *asintotico*: proseguendo l'ingrandimento verso il centro si ritrovano infinite spirali identiche in scala ridotta. Allo stesso modo allontanandosi sempre di più dall'origine aumentano le dimensioni della spirale, ma essa è sempre somigliante a se stessa. L'aggettivo “meravigliosa” di Bernoulli si riferisce proprio al fatto di non avere né inizio né fine: la proprietà per cui la curva esegue infinite evoluzioni verso e dal suo polo è detta *autosomiglianza*.

Sebbene partendo da un punto P della spirale si deve girare intorno al centro infinite volte prima di “raggiungerlo”, la distanza totale coperta da questo percorso è finita. Il primo ad accorgersi di questo paradosso fu uno dei padri del calcolo infinitesimale, **Evangelista Torricelli** (1608 - 1647) trattando la curva nella sua opera del 1645, “*De infinitis spiralibus*” (cfr. Appendice). Egli dimostrò geometricamente la rettificazione della spirale logaritmica; adesso grazie all'analisi possiamo dire che muovendosi all'interno della spirale la distanza totale coperta è $L = r \cos \theta$, dove r è la lunghezza del segmento che congiunge P all'origine e θ l'angolo tra r e l'asse delle ascisse. (cfr. Appendice: Sull'equazione della spirale logaritmica).



$$OA:OB=OB:OC$$

fig. 4b: la spirale meravigliosa

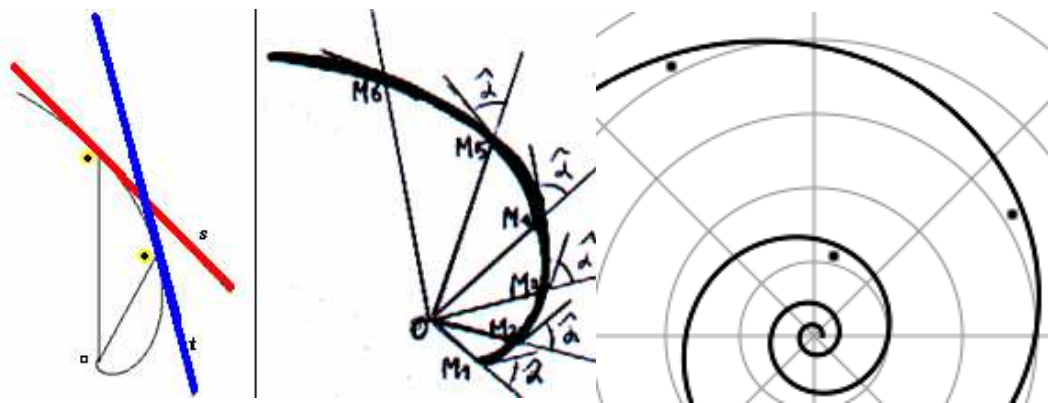


fig. 5: la spirale equiangolare

Per ogni punto sulla spirale logaritmica è costante l'angolo tra la tangente alla curva in quel punto ed il raggio vettore. Allo stesso modo l'angolo che la spirale forma con i cerchi centrati nell'origine (*l'angolo di inclinazione*) è costante (fig. 6). Per questi motivi il matematico francese **Pierre Varignon** (1654 -1722) la chiamò spirale *equiangularare* (o *equiangulara*).

Vi sono in ultima analisi alcune proprietà sulle trasformazioni di scala o rotazione che si possono effettuare sulla spirale mirabile, in riferimento a ciò Bernoulli scrive “*Simillima filia matri*”. Se una curva può essere approssimata da archi di circonferenza di centro diverso, il luogo dei punti dei centri delle circonferenze è detto *evoluta* della curva. Bernoulli si accorse che l'evoluta di una spirale logaritmica è a sua volta una spirale logaritmica.

Lo stesso procedimento sull'evoluta definisce l'*involuta*: l'involuta di una spirale mirabile è una spirale logaritmica. La spirale equiangolare è *anallagmatica* poiché l'*inversa* è ancora una spirale logaritmica. La *radiale* della spirale logaritmica è sempre una spirale mirabile, il *pedale* rispetto al polo (il luogo dei punti intersezione tra la perpendicolare condotta dal polo

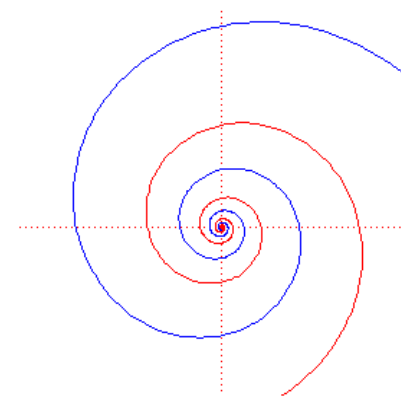


fig. 6: la spirale evoluta (in rosso)

ad una tangente alla curva) è sempre una spirale equiangolare. L'*ortottica* (il luogo delle tangenti alla curva che si incontrano ad angolo retto), la *caustica* (l'involuppo dei raggi riflessi dalla curva – il fuoco per la parabola –), l'*omotetica* (una dilatazione) sono curve a loro volta logaritmiche.

Proseguiamo analizzando l'equazione della curva: per lo studio algebrico della spirale logaritmica si impone che il raggio vettore r della curva sia una funzione continua e monotona di un angolo θ . Ci serviamo a tal fine di un sistema (fig. 7) xOy di coordinate polari tali che $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, dove r è la distanza di un punto generico P dall'origine degli assi (considerato come *polo* della spirale), e l'angolo θ indica l'inclinazione di OP rispetto all'*asse polare* (il semiasse positivo delle ascisse).

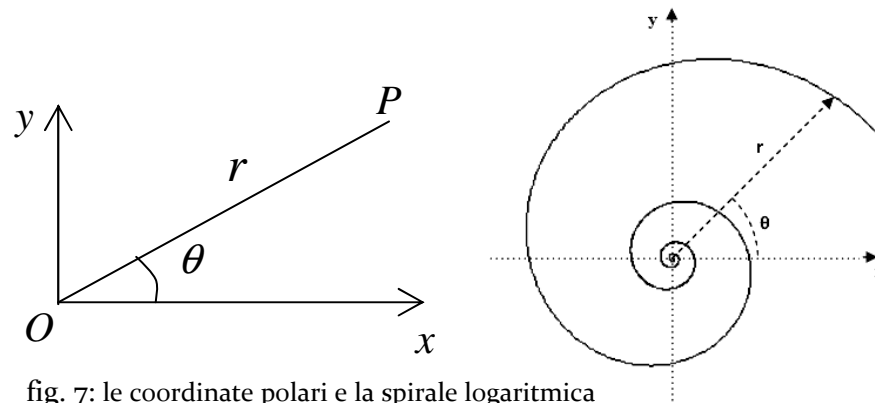


fig. 7: le coordinate polari e la spirale logaritmica

In questo modo è possibile definire in coordinate polari (θ, r) l'equazione della spirale mirabile:

$$f(\theta) = r = ab^{\theta} \quad (1)$$

(oppure $r = b^{k\theta}$, con k costante, $k \in \mathbb{R}$), essendo a e b due costanti caratteristiche ($a, b \in \mathbb{R}$) con $f(\theta)$ funzione monotona sempre crescente o sempre decrescente, rappresentata in un intervallo non limitato.

La (1) è equivalente alla seguente

$$b^\theta = \frac{r}{a} \quad (2)$$

che, esplicitando θ , diviene

$$\theta = \log_b \left(\frac{r}{a} \right)$$

(oppure, in analoga forma, $\theta = \log_b \sqrt[k]{r}$).

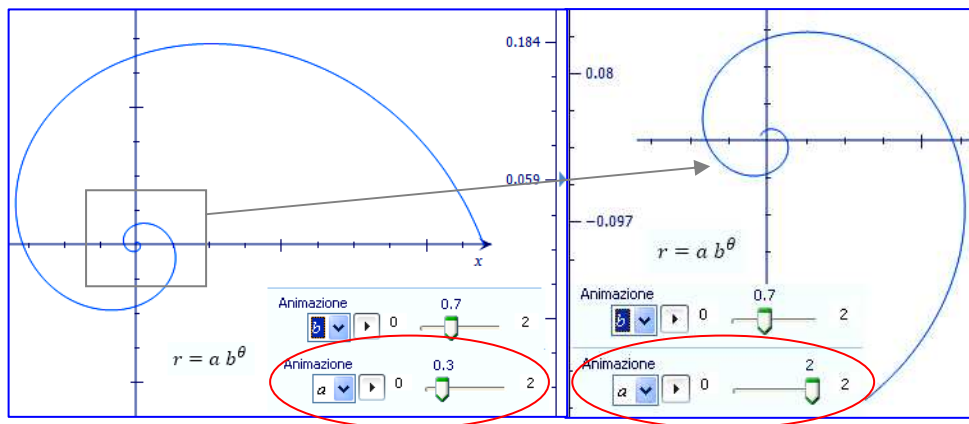
Ecco dunque spiegato l'attributo "*logaritmica*": l'angolo tra il raggio vettore e l'asse polare è proporzionale al logaritmo della lunghezza del vettore stesso. L'equazione esponenziale giustifica che quando gli angoli si sommano le lunghezze delle corde si moltiplicano. Dato che il polo è un punto *asintotico* è valida dunque la seguente relazione:

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} r = 0$$

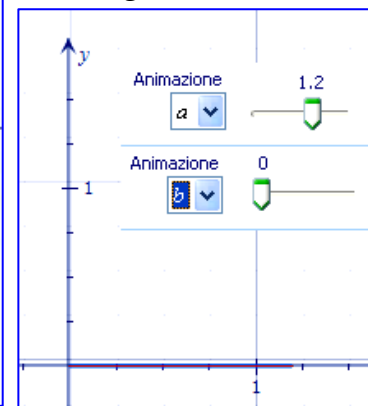
Variando i due parametri a e b si possono ottenere diversi tipi di spirali logaritmiche. Il coefficiente a modifica le dimensioni della spirale e dunque la rotazione della curva. Il termine b controlla quanto è "stretta" e in quale direzione essa si avvolge. Dato $a = 0$ allora $f(\theta) = 0$. Dato $a \neq 0$, per $b = 0$ la spirale degenera in un segmento di lunghezza a ; per $b \rightarrow \infty$ la funzione degenera in una semiretta che parte dall'origine, poiché la spirale ha inclinazione di 90° . Per $b = 1$ l'inclinazione della spirale logaritmica è 0° e essa degenera in un cerchio. Per $b \rightarrow 1$ la velocità di crescita della spirale logaritmica è lenta e in un dato intervallo essa può ricondursi alla spirale di Archimede.

Poiché a e b sono delle costanti $\in \mathbb{R}$, è possibile dare a questi parametri alcuni valori particolari: la spirale logaritmica che più ha affascinato gli studiosi è la spirale *aurea* o *armonica*. La spirale *armonica* è la spirale logaritmica il cui rapporto costante tra i raggi consecutivi è pari a φ , ovvero il rapporto aureo: la progressione geometrica nella spirale ha ragione φ . (cfr. *Appendice: La sezione aurea per la spirale*). L'equazione della spirale armonica è $r = a\varphi^\theta$.

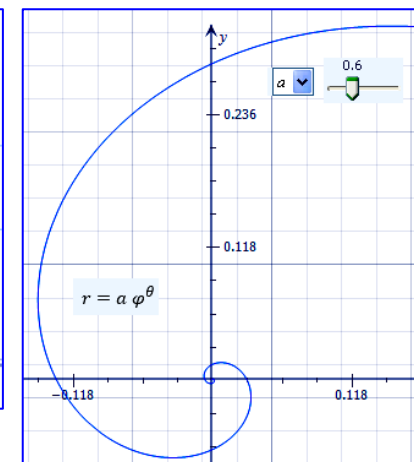
Al variare di a (da 0,3 a 2) cambia l'ingrandimento della spirale



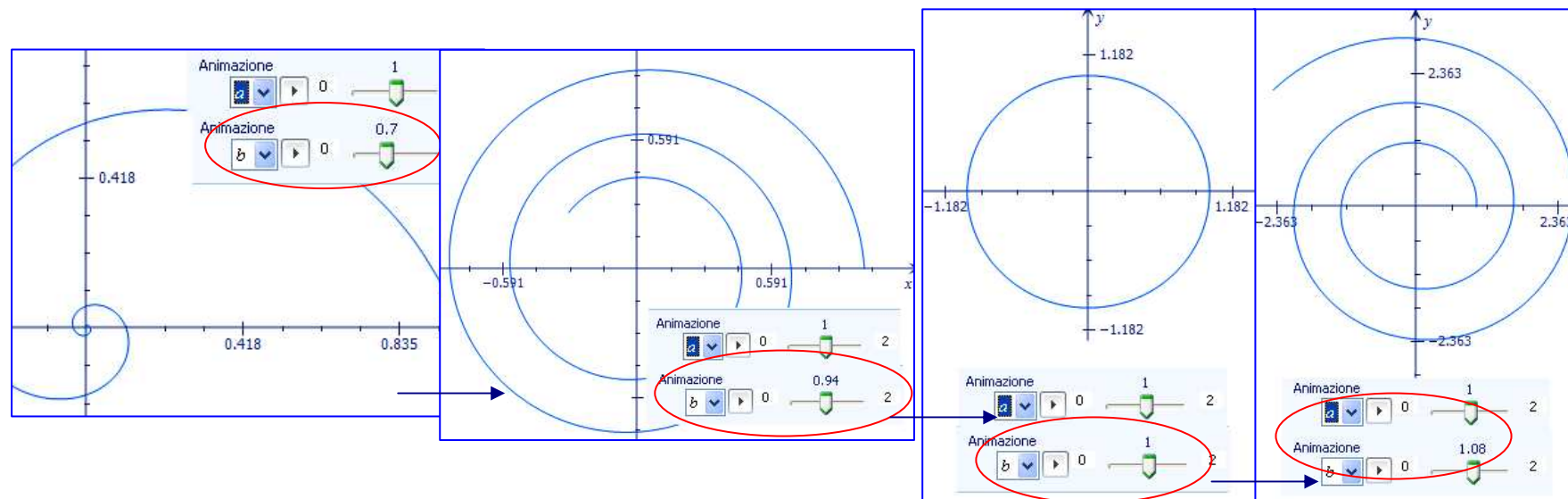
Per $b=0$ la spirale degenera in un segmento



Un esempio di spirale armonica



Modificando il valore di b (da 0,7 a 1,08) cambia il rapporto tra le spire e la direzione della spirale



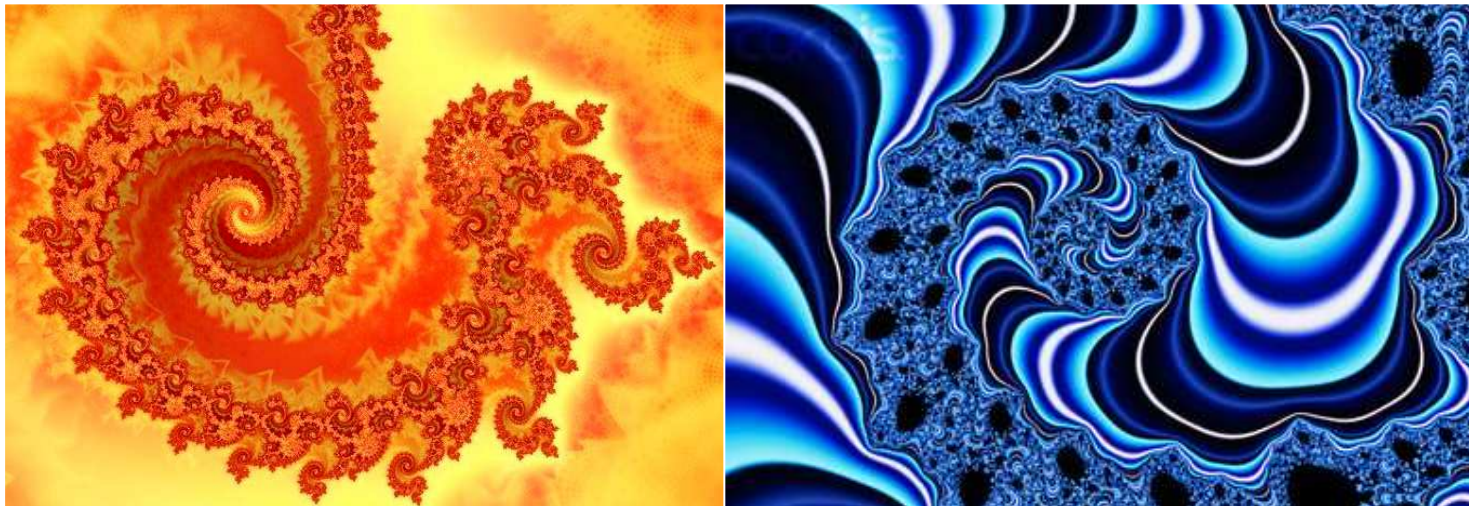
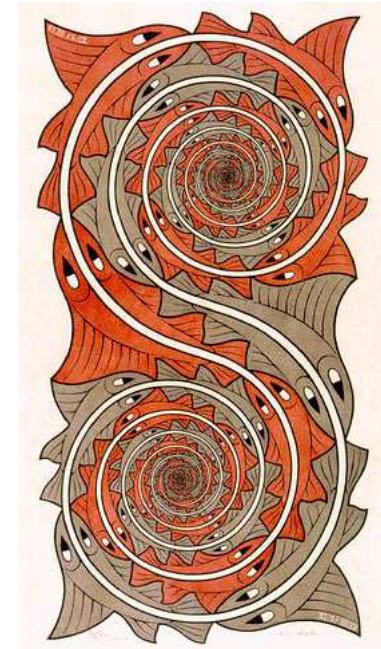
1.3 FRATTALI, PROBLEMI E REALTA'

Tra i disegni sulla spirale mirabile, spicca la bellissima costruzione “Vortici” del artista e matematico olandese **M. C. Escher** (1898 – 1972) (fig. 8): due lossodromie (la curva inversa alla spirale logaritmica) seguono le spine dorsali dei due pesci.

fig. 8: “Vortici”

Il legame tra spirali e costruzioni di tipo frattale è strettissimo: la caratteristica che rende la spirale logaritmica stessa un frattale è l'*autosomiglianza*. A ciò si aggiunge il fatto che tra le più belle immagini di frattali ve ne sono alcune che rappresentano spirali mirabili (fig. 9).

fig. 9: esempi di frattali



La proporzionalità e la proprietà di essere equiangolare emergono nel curioso problema posto da Steven R. Finch (2005)¹.

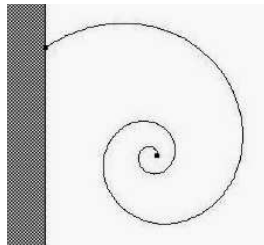


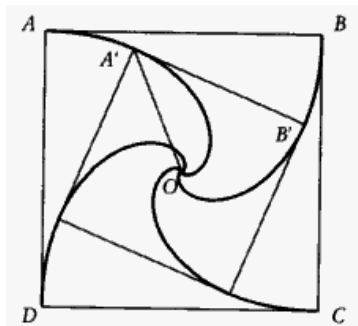
fig. 10: la
traiettoria del
nuotatore
dall'alto

“La nebbia è calata all'improvviso sul mare.
Il nuotatore scelga il percorso che renda minimo il
massimo tempo di fuga”

La soluzione al quesito (fig. 10) è proprio una spirale logaritmica, poiché permetterebbe al nuotatore di avere la certezza di raggiungere la spiaggia.

Nell'illusione di J. Fraser (fig. 11) l'occhio e il cervello percepiscono l'immagine come una spirale logaritmica. Le linee in realtà sono circonferenze concentriche di diametro diverso: è facile rendersene conto muovendo il dito su di esse. Lo sfondo e le bande nere e bianche delle curve traggono in inganno.

Altrettanto curioso un altro famoso problema matematico, detto *dei cani* (anche dei topi o degli scarabei):



“Se dei cani posti all'angolo di un cortile quadrato, inseguono alla stessa velocità il cane alla loro destra, quale traiettoria compiono e quale è il loro punto di incontro?”

Risposta: i cani percorreranno una spirale logaritmica con un'inclinazione, in questo caso, di 45 gradi. Prima di raggiungersi i cani dovranno compiere un numero infiniti di giri attorno al centro della corte.”²

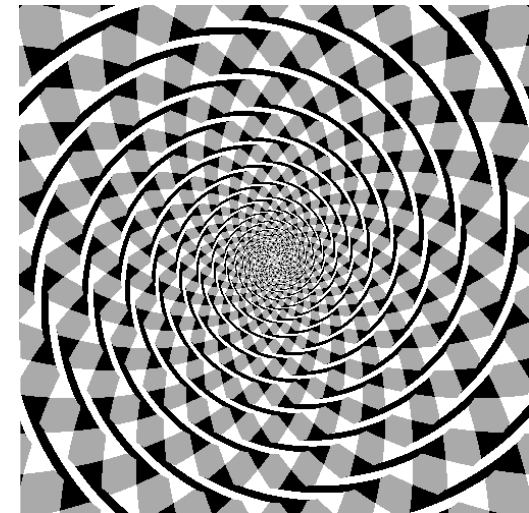
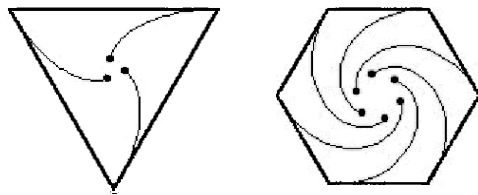


fig. 11: la “falsa” spirale di Fraser

¹ T. Norando, *Aspetti del numero d'oro*, relazione per convegno IREE 2005, pag. 24.

² L. Cresci, *Le curve matematiche tra curiosità e divertimento*, Hoepli, Milano, 2005, pag. 212



Questo problema definisce la spirale logaritmica come *curva di inseguimento e di fuga*, caratteristica per la quale la curva è studiata per l'analisi delle traiettorie dei missili a ricerca termica. Il problema può essere generalizzato: n cani partono dai vertici di un poligono di n lati, ogni cane si dirige verso il compagno più vicino in senso antiorario ed a velocità costante (due esempi in [fig. 12](#)). I cani percorreranno una distanza in relazione al numero di lati del poligono pari a
$$d_n = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} .$$

Nella vita quotidiana si incontrano moltissime spirali, ovviamente non tutte “meravigliose”, tuttavia è curioso notare che l’uomo utilizza spesso la forma logaritmica (fig. 13) (§ 3). Accanto un collage: dai francobolli in onore alla curva, alle viti metalliche, dal riccio degli archi, ai tatuaggi maori.



La spirale ‘meravigliosa’ nelle Scienze



“La natura ama le spirali logaritmiche: dai girasoli alle conchiglie, dai vortici agli uragani alle immense spirali galattiche, sembra che la natura abbia scelto quest’armoniosa figura come proprio ornamento favorito.”

Mario Livio



“Osservando con attenzione le forme della natura e del paesaggio possiamo scoprire strutture geometriche perfette. A volte queste geometrie sono facilmente riconoscibili, altre volte sono meno evidenti e necessitano di un’analisi più approfondita.”³. Come descrivono i classici “*Le curve della vita*” di Theodore Cook e “*Crescita e forma*” di D’Arcy Thompson, spesso si trovano esempi di spirali logaritmiche in ambito naturale. Queste sono *tendenze* (e non regole) e le proprietà di *auto-similarità*, di *crescita con continuità* e di *ottimizzazione* dello spazio sono ora fondamentali per capire perché questa forma si ritrova in diversi esempi.

2.1 IN BIOLOGIA E SCIENZE DELLA TERRA

La posizione delle foglie e la disposizione dei petali e dei semi di alcune specie seguono la forma della spirale logaritmica. La *fillotassi*, ovvero lo studio della disposizione dei diversi elementi nelle piante, spiega che la crescita di rami, foglie, semi e squame avviene in modo da essere ottimale e meno dispendiosa possibile: lo scopo è ridurre lo spreco di spazio. Nel 1907 G. van Iterson ha dimostrato che una serie di punti, disposti secondo l’angolo di accrescimento (circa 137 gradi, la sezione aurea dell’angolo di giro), viene visivamente percepita come una coppia di famiglie di spirali (spirali *vegetative*), le une orarie e le altre antiorarie, in quantità pari a due numeri di Fibonacci consecutivi.

³ E. Morello, *L’arte come esperienza*, La Nuova Italia, Firenze, 1996, pag. 98.

I fiori delle Astaracee sono un esempio significativo: i semi del girasole sono disposti secondo due gruppi di spirali logaritmiche. Gli elementi di infiorescenza del fiore crescono in modo da occupare nel modo più efficiente lo spazio circolare al centro del fiore. Il numero delle spirali dipende dalle dimensioni del fiore: di solito 55 spirali sono disposte in un senso e 34 nel senso opposto (oppure 89/55, 144/89 e 233/144). La formula $(\theta = \frac{2\pi}{\phi}, r = \sqrt{i})$ con $i \in \mathbb{R}$, che riporto per dovere di cronaca ma io stesso non ho verificato, si disegna la struttura del girasole. Anche nella *pigna* le squame sono disposte lungo linee a spirali (8 e 13); allo stesso modo alcuni cactus (in particolare la famiglia Cactacee) e alcune piante rampicanti, ma anche l'ananas (5, 8, 13 o 21 spirali) e il cavolfiore hanno strutture simili (fig. 15).

Come tra i vegetali, anche nel mondo degli animali molti fenomeni di accrescimento richiedono le proprietà dell'*omogeneità*, per cui la struttura sia sempre la stessa, e dell'*autosomiglianza*: la struttura, ingrandita o rimpicciolita, deve conservare lo stesso aspetto (N. River). Per questo la spirale mirabile, detta *spirale "di crescita"*, si può ritrovare ad esempio nelle conchiglie dei cefalopodi (phylum dei molluschi): i *nautili*, da miliardi di anni negli oceani, crescono secondo una spirale logaritmica mentre il crostaceo *telescopium* (phylum: *artropodi*), ne segue una forma tridimensionale (fig. 16).

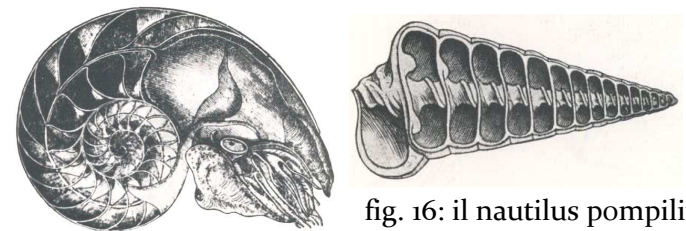
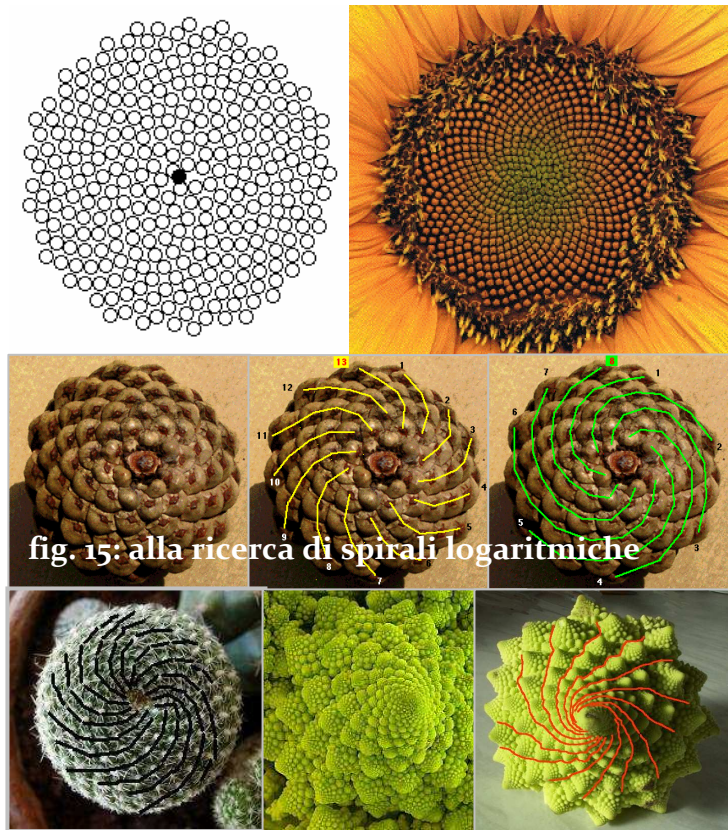




fig. 17: chiocciola, la struttura al computer, foraminifero e nautilus

Tuttavia la spirale di crescita si può più facilmente ritrovare nelle conchiglie dei *gasteropodi* (phylum dei *molluschi*): *lumache*, *chiocciole**, *trattole di mare*, *jantine* e *fasciolarie* presentano coloratissime conchiglie a forma di spirale meravigliosa (fig. 17).

Anche guardando i fossili, come i *foraminiferi* (a destra su sfondo rosso) o le *ammoniti*, possiedono questa forma. Tutte queste strutture crescono secondo una crescita per addizione (accumulazione interna) e una crescita isometrica (un semplice ingrandimento), in questo modo, aumentando il *passo* della spirale, non è necessario correggere alcun equilibrio.

Curiosamente anche gli insetti (phylum degli *artropodi*) hanno a che fare con la spirale logaritmica: perché gli insetti vanno a sbattere contro la griglia elettrificata delle lampade fulminanti? Sorprendentemente perché seguono una spirale logaritmica come traiettoria! La maggior parte degli insetti, infatti, si “orienta” nello spazio in base alla posizione del sole (o della luna), mantenendo un angolo fisso rispetto ai raggi di luce: la velocità del moto dell’insetto dipende da tale angolo. Per questo, essendo il sole un riferimento decisamente lontano, essi negli spazi aperti si muovono liberamente secondo traiettorie rettilinee. Tuttavia nel momento in cui l’insetto assume come riferimento la luce della lampada, molto vicina, seguendo un angolo costante piccolo (secondo una spirale equiangolare) si avvicina sempre di più all’oggetto elettrizzato e entra in contatto con la lampada.

Un altro animale che sfrutta le proprietà della spirale è il *falco pellegrino*, uno degli uccelli più veloci al mondo (negli attacchi può raggiungere la velocità di 300 Km/h) e uno dei predatori più temibili per la vista acuta e l’abilità di volo. Il biologo Vance A.

*Una curiosità: soltanto 1 chiocciola su 20.000 nasce con la conchiglia che si avvolge dall’esterno all’interno in senso orario, ponendo l’apertura in alto.

Tuker chiedendosi come mai il falco nel piombare su una preda non scegliesse una traiettoria rettilinea, più breve e più veloce, nel 2000 ha dimostrato che l'animale in picchiata segue una spirale logaritmica (fig. 18). Poiché gli occhi del falcone guardano lateralmente l'uccello dovrebbe ruotare la testa per vedere la preda, tale assetto peggiorerebbe la sua aerodinamica: l'animale tiene la testa dritta seguendo una spirale mirabile in modo da non perdere di vista la preda e al tempo stesso massimizzare la velocità.

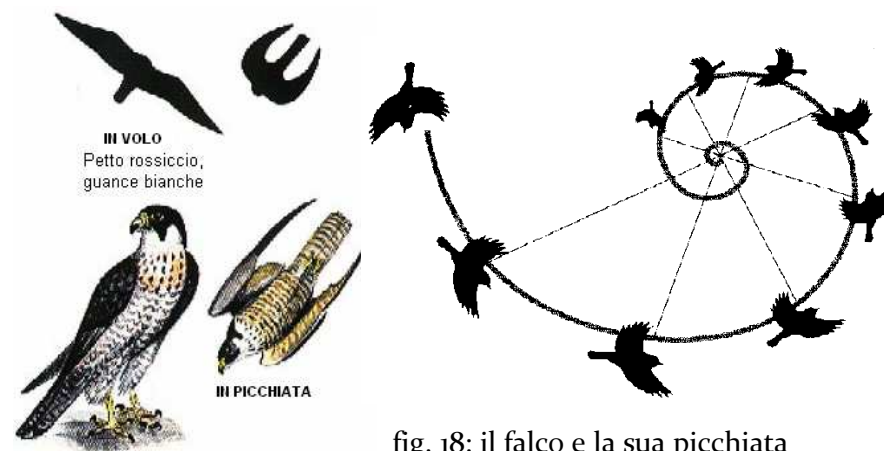


fig. 18: il falco e la sua picchiata



fig. 18: corna e code

Anche per mammiferi la crescita delle *corna* (per famiglia dei caprini, ad esempio l'ariete), delle *zanne* (ad esempio degli elefanti), degli *artigli* e delle *code* di alcune specie, segue lo stesso principio di crescita delle conchiglie dei gasteropodi. Le code più sorprendenti sono quelle del camaleonte e del cavalluccio marino (fig. 19).

Per quanto riguarda l'uomo, mentre è poco significativo assimilare l'orecchio esterno ad una spirale, nell'apparato uditivo la *chiocciola* o *coclea* (dal latino di chiocciola) ha questa forma. Essa è responsabile di percepire le vibrazioni prodotte dalle onde sonore e, tramite alcuni recettori, trasformarle in segnali nervosi (fig. 20).

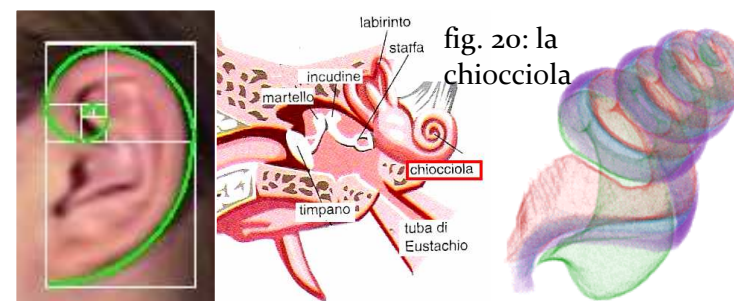


fig. 20: la chiocciola

Sorprendentemente anche elementi naturali inorganici rimandano alla spirale mirabile: i cicloni tropicali (fig. 21), intense perturbazioni caratterizzate da venti e piogge violente, ma anche i tornado (le trombe d'aria), sia terrestri che marini, assumono la forma di immense spirali logaritmiche. I venti dei cicloni in pieno sviluppo convergono verso il centro a velocità che possono raggiungere i 300 Km/h, descrivendo spirali quasi perfette, antiorarie nell'emisfero boreale e orarie in quello australe. Sembra che anche le onde dell'oceano nel momento in cui raggiungono la maggior altezza seguono una forma logaritmica.

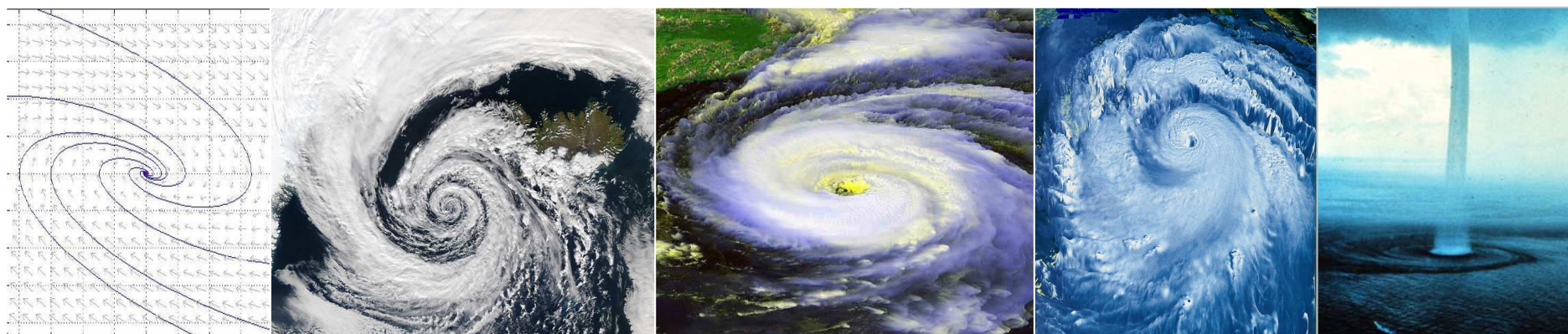
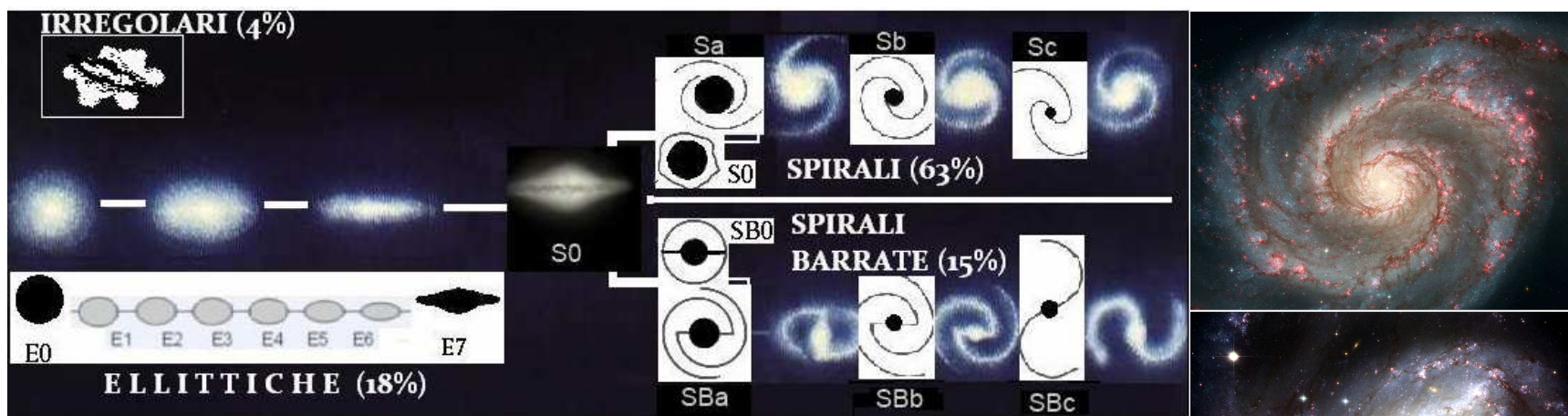


fig. 21: traiettoria dei venti, la depressione d'Islanda, analisi 3D di un ciclone, il ciclone Linda, un tornado marino

2.2 IN ASTROFISICA

Ritroviamo la spirale logaritmica tra le strutture più complesse formanti l'intero universo: le galassie. Le circa 100 miliardi di galassie dell'universo sono state classificate secondo la loro forma nel 1926 dall'astronomo americano E. Hubble. Anche se oggi sappiamo che non è completamente corretto, tale schema, è basilare (cfr. Appendici). La classificazione suddivide le galassie in *ellittiche*, *a spirale*, *a spirale barrata* e *irregolari*. A seconda della loro estensione sono poi suddivise in sottogruppi: da **E0** a **E7**

per le galassie ellittiche, da **SAa** a **SAC** (o **SAd**) per le galassie a spirale normali e da **SBa** a **SBc** (o **SBd**) per quelle a spirale barrata. Le galassie irregolari sono suddivise nei tipi **I** e **II**. Le galassie **S0** sono galassie lenticolari: rappresentano il passaggio dalle galassie ellittiche a spirale, essendo simili ad un disco ma non avendo forme assimilabili ai bracci di una spirale.



LA CLASSIFICAZIONE DI HUBBLE: IL DIAGRAMMA A DIAPASON
Il colore delle galassie si sposta da rosso a blu, da sinistra a destra.

fig. 22: a sinistra la galassia ellittica (E2) M 32, a destra le galassie a spirale normale (SAc) M51, e a spirale barrata NGC 1672.

Per le galassie ellittiche la cifra n che segue la sigla E rappresenta il grado di eccentricità, espresso tramite la seguente $n=10\left(1-\frac{b}{a}\right)$ dove a e b sono il semiasse maggiore e minore della galassia ellittica. Le galassie a spirale sono la forma più diffusa: nelle SAa il nucleo è di grandi dimensioni e i bracci sono molto stretti. Le SAC hanno nucleo piccolo o quasi inesistente e bracci molto aperti, nella categoria SAd l'angolo di apertura media dei bracci della spirale è di 25° . Oggi sappiamo che le galassie a spirale in realtà non sono un'evoluzione delle galassie ellittiche e che, benché molto appariscenti, i bracci delle galassie a spirale rappresentano soltanto il 4-6% della massa complessiva della galassia.

Continuous as the stars that shine
And twinkle on the milk way,
They stretched in the never-ending line

[Fitti come le stelle che brillano
E sfavillano sulla Via Lattea
Così si stendevano in una linea infinita]

W. Wordsworth, Daffodils. fig. 23: la Via Lattea



(New Mexico Desert)

La stessa Via Lattea (fig. 23), la scia biancastra visibile nel cielo nelle notti serene, con una massa di 200 miliardi di masse solari, è una galassia *a spirale barrata* di medie dimensioni. Vista dall'alto potrebbe sembrare una girandola con quattro bracci spirali principali (il braccio di Orione, di Perseo, del Cigno e del Sagittario), ciascuno dei quali è una spirale logaritmica con inclinazione di circa 12 gradi (fig. 24). Il Sistema Solare si trova nella parte più interna del braccio di Orione: da questa posizione, lungo il piano galattico, il nucleo è visto come un ellissoide molto appiattito, che presenta un rigonfiamento al centro. Tutti i bracci della nostra galassia, tuttavia, non hanno una struttura continua, ma presentano lacune o interruzioni.

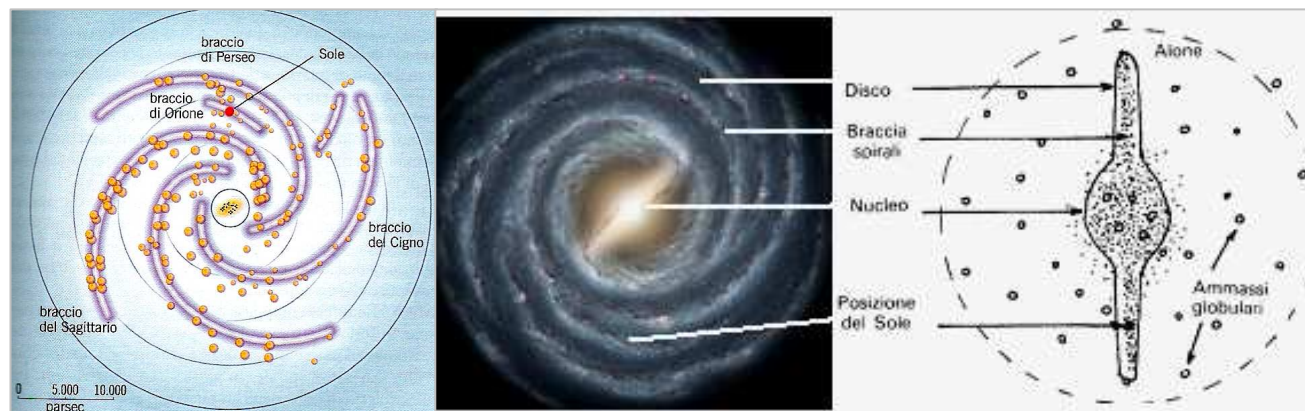
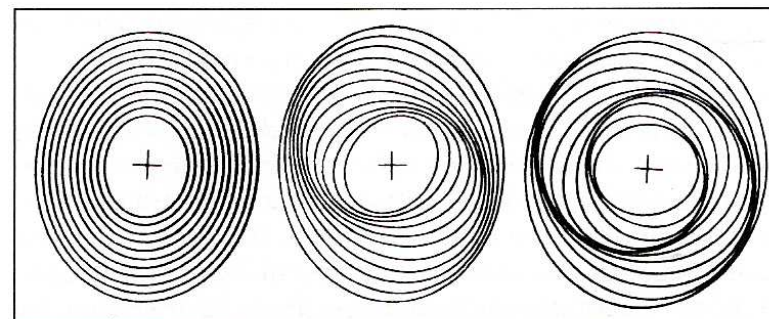


fig. 24 schema della la Via Lattea, ricostruzione della nostra Galassia, vista da Andromeda, poi di profilo.

Le galassie a spirale non sono strutture statiche, bensì compiono un moto di rotazione estremamente complesso. Studiandone il moto si è cercata la motivazione dell'esistenza dei bracci spirale e del fatto che essi non si consumino, avvolgendosi intorno al nucleo. Le galassie, infatti, hanno un movimento rotatorio *differenziale*: le regioni e le stelle più vicine al nucleo si muovono più velocemente delle zone più lontane. Se i bracci spirale fossero una semplice conseguenza di questo moto di rotazione ve ne sarebbero decine e i bracci galattici interni, si avvolgerebbero su sé stessi, scomparendo.



Apparente formazione dei bracci spirali: le ellissi rappresentano le orbite descritte da stelle e gas attorno al centro galattico.

Per effetto della rotazione differenziale, le ellissi di asse minore ruotano più rapidamente di quelle di asse maggiore; perciò dopo un certo tempo gli assi non saranno più allineati e verranno a formarsi delle configurazioni, come quelle visibili al centro e a destra.

fig. 25: la teoria delle onde di densità

Soltanto nel 1941 si è compreso che la spiegazione non andava ricercata nella cinematica, bensì occorreva trattare la galassia come un fluido e dunque studiarne la fluidodinamica: C. C. Lin e Frank Shu (e poi Giuseppe Bertin), proposero la teoria delle *onde di densità* galattiche, confermata in questi anni. Se la materia descrive orbite ellittiche, nelle varie orbite si vengono a formare naturalmente ammassi di materia di maggior densità: sono appunto bracci della spirale. In queste zone di compressione, le onde d'urto favoriscono la formazione di nuove stelle azzurre (fig. 25).

Lo stesso Sistema Solare ruota (fig. 26: le frecce piccole indicano il movimento delle stelle relativo al Sole.) intorno al nucleo galattico, verso il braccio del Cigno, alla velocità di 250 Km/sec e impiegando 225 milioni di anni per fare una rivoluzione completa (*anno cosmico*).

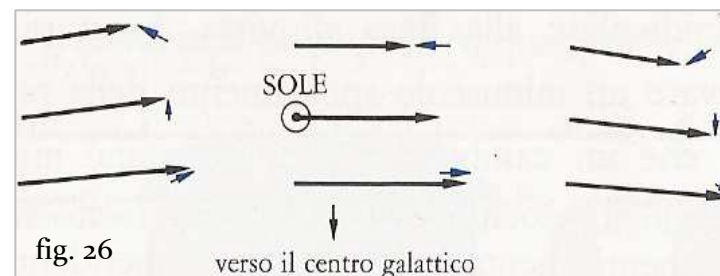


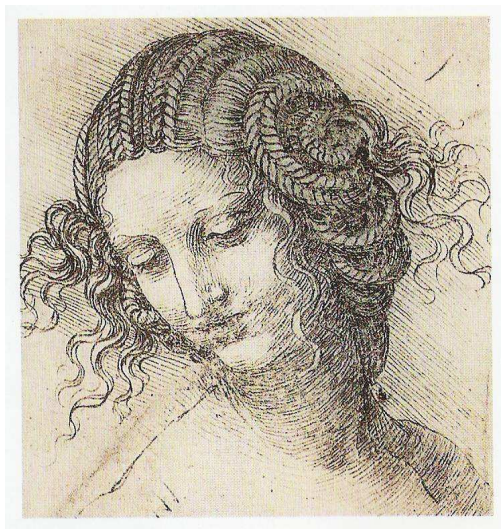
fig. 26

verso il centro galattico

La spirale ‘meravigliosa’ nelle Arti

“[...] Tutte le melodie e le armonie sono imbevute di numeri e di geometria, le proporzioni fanno vivere i quadri e la poesia lirica [...]. Ovunque ci sono numeri, c’è bellezza e siamo nelle immediate vicinanze dell’arte.”

Andreas Speiser (1885-1970)



Questo paragrafo è un piccolo excursus rispetto alle tematiche affrontate sinora, esso nasce dal desiderio di ampliare la riflessione, seppur brevemente, ad altri ambiti che non siano strettamente legati né alla matematica né alle scienze della natura.

Numerosi artisti hanno utilizzato forme a spirale, dall'impressionista **Van Gogh** in “*Giapponeseria: Orian*” e “*Notte Stellata*” a uno degli esponenti del Liberty, **Gustav Klimt**, in “*L’attesa*” o “*L’abbraccio*”. Anche **Leonardo Da Vinci** utilizzò questa forma. Tra i suoi disegni è stato evidenziato lo studio per la capigliatura di “*Leda*” (1503-1506 circa), prezioso poiché manca l’originale dipinto; in questo disegno ([fig. 27](#)) i capelli di Leda sembrano disposti secondo una spirale mirabile che li raccoglie sui lati del capo.

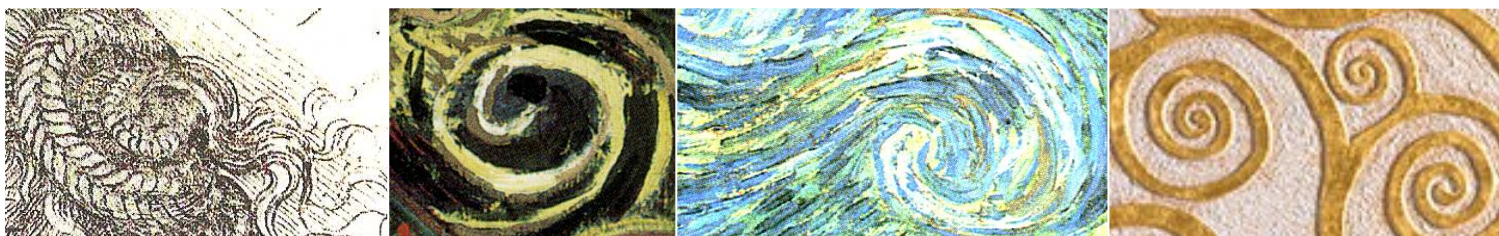


fig. 27: Particolari: Leonardo, Van Gogh (*Giapponeseria: Orian* e *Notte stellata*), Klimt. [Cfr.: Appendici]

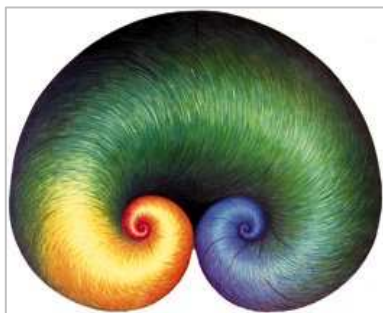


fig. 28: "Discovering" (1997), "Hermes" (1985)

Decisamente più moderne ed esplicitamente dedicate alla spirale armonica alcune opere di Antonio Peticov (fig. 28). **Mario Merz** (1926-2003), pittore e scultore italiano, accanto al motivo costante dell'igloo, ha presentato alcune installazioni (fig. 29) ispirate alla spirale di Fibonacci (cfr. Appendice: *La costruzione della spirale logaritmica*).



fig. 29: due installazioni di Mario Merz

Tuttavia l'ambito architettonico e del *design* sono i più ricchi di spunti: dalle scalinate al mobilio per l'arredamento, esempi che si basano sulle proprietà della spirale logaritmica (fig. 30).



fig. 30: esempi di scale simili a spirali logaritmiche tridimensionali, un lampadario, a destra una doccia "mirabile"



fig. 31: il Quincy Parck a Cambridge

Esiste a Cambridge un intero parco tematico sulla sezione aurea e sulla spirale logaritmica, con addirittura una targa commemorativa (fig. 31): il *Quincy Park*, progettato nel 1997 dall'artista David Phillips, presenta una serie di elementi chiaramente riferiti alla spirale logaritmica.

Ancora più sorprendente il fatto che un intero progetto architettonico di costruzione di una nuova area per la *California Polytechnic State University* (fig. 32), sia stato basato geometricamente su una spirale logaritmica. I lavori per l'area *Engineering IV* dell'università sono stati svolti a partire dal 2005 dall'architetto Jeffery Gordon Smith. I designer hanno spiegato di aver selezionato la spirale logaritmica “as representation of engineering knowledge”.

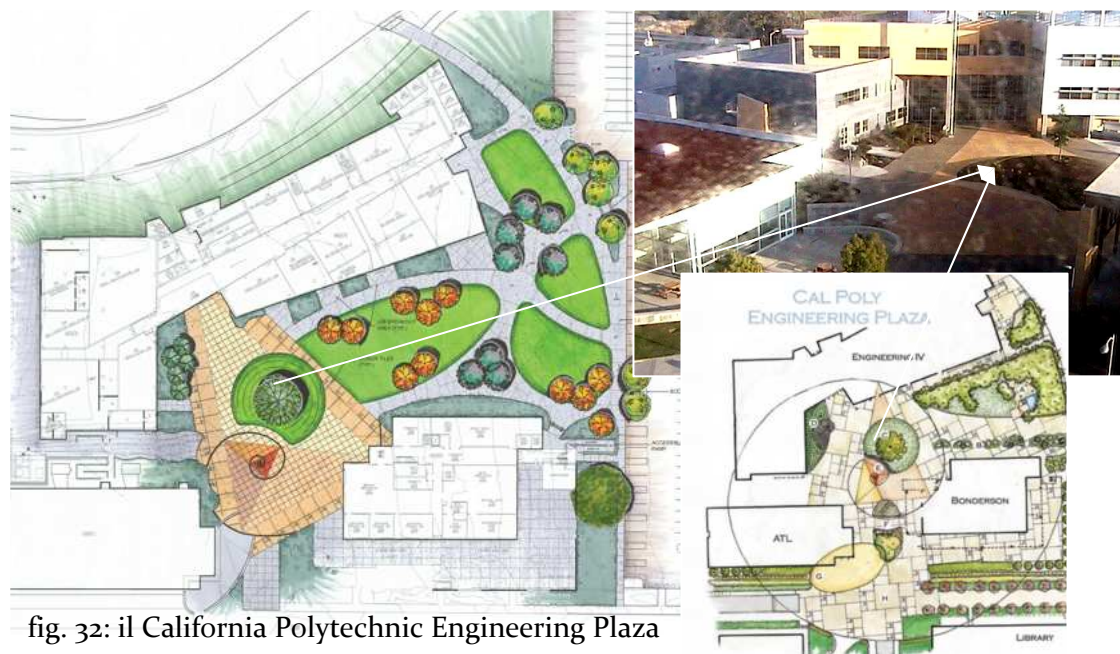


fig. 32: il California Polytechnic Engineering Plaza

Perchè non cercare qualche spunto sulla spirale in Letteratura e Filosofia? In primo luogo il termine “spirale” in senso figurato significa “sviluppo costante e a intensità crescente di un sentimento, fenomeno e simile specificatamente negativo: la s. dell’odio e la s. della violenza”⁴ oppure ancora “una conservazione (continuità) e contemporaneamente un cambiamento (conservazione)”.

Invece secondo Louise Bourgeois:

“La spirale è il tentativo di controllare il caos. Ha due direzioni. Dove si colloca, alla periferia o al vortice? Cominciare dall’esterno è paura di perdere il controllo: l’avvolgimento è serrarsi, ritirarsi, comprimersi fino a sparire. Cominciare dal centro è affermazione, muoversi verso l’esterno rappresenta il dare e l’abbandonare il controllo; la fiducia, l’energia positiva, la vita stessa.”⁵

Italo Calvino nella sua opera di ispirazione fantascientifica “*Le cosmicomiche*” (1965), inserisce il racconto “*La spirale*”, in cui rappresenta la vita di un gasteropode che, creando una conchiglia colorata, inizia a percepire – pur non vedendo – la concezione di vista: forme che appaiono bellissime al nostro sguardo esistono indipendentemente da ogni rapporto con la visibilità.

“Così incominciai a fare la prima cosa che mi venne, ed era una conchiglia. Continuai anche dopo che essa mi aveva ricoperto tutto il corpo, e così incominciai un altro giro, insomma mi veniva una conchiglia di quelle tutte attorcigliate a spirale, che voi a vederle credete siano tanto difficili invece crescono così un giro dopo l’altro. A intervalli regolari la roba calcarea che secernevo mi veniva colorata, così si formavano tante belle strisce che continuavano dritte attraverso le spirali, e questa conchiglia era una cosa diversa da me ma anche la parte più vera di me, la spiegazione di chi ero io. Avendo la conchiglia una forma, anche la forma del mondo era cambiata nel senso che adesso comprendeva la forma del mondo com’era senza la conchiglia più la forma della conchiglia. E ciò aveva grandi conseguenze: la conchiglia così era in grado di produrre immagini visuali di conchiglie. (...) Un’immagine presupponeva una retina, al quale a sua volta presuppone un sistema complicato che fa capo ad un encefalo. (...)”

Solo non avevo previsto una cosa: gli occhi che finalmente si aprirono per vederci erano non nostri ma di altri. Così la *nostra* vista, che noi oscuramente aspettavamo, fu la vista che gli altri ebbero di noi. Tutt’a un tratto intorno a noi s’aprono occhi e cornee e iridi e pupille. Gli occhi inespressivi d’un gabbiano scrutano il pelo dell’acqua. Di là d’una maschera di vetro gli occhi aggrottati d’un pescatore subacqueo esplorano il fondo. Dietro a lenti di cannocchiale gli occhi d’un capitano di lungo corso e dietro a occhiali neri gli occhi d’una bagnante convergono i loro sguardi sulla mia conchiglia, poi li intrecciano tra loro dimenticandomi. (...). Tutti questi occhi erano i miei. Li avevo resi possibili io: io gli fornivo la materia prima: l’immagine. (...) E in fondo a ognuno di quegli occhi abitavo io, ossia una delle immagine di me che si intrecciava nell’ultramondo che s’apre attraversando la sfera semiliquida delle iridi, il buio delle pupille, il palazzo di specchi delle retine, nel vero nostro elemento che si estende senza rive né confini.”⁶

⁴ Edigeo (a cura di), *Enciclopedia Zanichelli*, Zanichelli, Bologna, 1995, pag 1764. ⁵ T. Norando, *Aspetti del numero d’oro*, relazione per convegno IREE 2005, pag. 50. ⁶ Con tagli (n.d.A.), tratto da I. Calvino, *Tutte le cosmicomiche*, Arnoldo Mondadori, Milano 1997

Conclusioni



“Come è possibile che la matematica, un prodotto del pensiero umano indipendente dall’esperienza, corrisponda in modo così perfetto agli oggetti della realtà fisica?.”

Albert Einstein (1879-1955)

Questo percorso di approfondimento ci ha portato dalla semplice descrizione di una curva matematica al moto differenziale delle galassie: a partire da un approccio intuitivo, che ha sottolineato le notevoli proprietà geometriche e matematiche della curva, dopo aver scoperto – dal fiore alla galassia – la relazione tra fenomeni naturali e questa curva, possiamo dire che *Bernoulli aveva proprio ragione*.

Tuttavia la *spirale mirabile*, struttura ritrovabile anche nella vita quotidiana, è solo la *punta dell’iceberg* della matematica che c’è intorno a noi: questi spunti di riflessione sono stati solamente piccole sorprese.

Sottolineando che alcuni degli studi pubblicati su questa curva sono ricchi di elementi non dimostrati scientificamente, e sebbene alcune teorie non hanno applicazione universale, il mio obiettivo è stato un semplice esercizio di ricerca scientifica, per osservare meglio ciò che è intorno a noi da più punti di vista e ambiti diversi. E’ significativo, in questo senso, l’affermazione di T. A. Cook in *The Curves of Life*:

“(…) Per l’esistenza di questi capitoli sulla formazione delle spirali non occorre presentare scuse diverse dall’interesse e dalla bellezza dell’investigazione”.

La chiocciola

Viva la chiocciola,
viva una béstia
che unisce il mèrito
àlla modèstia.
Essa àll’astrònomo
e all’architétto
fórse nell’ànimo
destò il concètto
del cànnocchiàle
e délle scàle:
viva la Chiòcciola,
càro animàle.

G.Giusti

Riferimenti Bibliografici e Sitografia

Testi principali (in ordine di consultazione)

- 📖 M. Livio, *La sezione aurea*, Bur, Roma, 2007
- 📖 P. Odifreddi, Variazioni: un tema aureo, *Le Scienze*, n. 436, dicembre 2004, pagg. 76-81
- 📖 C. J. Snijders, *La sezione aurea. Arte, natura, matematica, architettura e musica*, Franco Muzzio, 1993
- 📖 Enciclopedia scientifica tecnica Garzanti, vol. L-Z, Garzanti, Milano, 1982
- 📖 L. Cresci, *Le curve matematiche tra curiosità e divertimento*, Hoepli, Milano, 2005
- 📖 D. W. Thompson, *Crescita e forma*, Boringhieri, Torino, 1961
- 📖 G. Marchianò, *La parola e la forma*, Dedalo, Milano, 1977
- 📖 G. Gallino, *Infinita...mente: pillole di matematica condite con magia*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, 2004
- 📖 S. Deiters, N. Pailer, S. Deyerler, *Astronomia*, Contmedia GmbH, Colonia, 2000
- 📖 D. Burnie, Biblioteca Enciclopedica per ragazzi: Animali, voll. 1 e 2, Mondadori, 2002
- 📖 L. Roi, Corso di Astronomia, Biblioteca di Ponticello Conte Otto, Novembre 1997
- 📖 P. Mangionami, *Buchi Neri. Da Mitchell alla teoria delle stringhe, l'evoluzione di un'idea*, dossier pubblicato dalla Provincia di Torino per Torinoscienza, 2002. (Fonte Web <http://www.torinoscienza.it>, maggio 2008)
- 📖 P. Bianucci, W. Ferreri, *Atlante dell'universo*, Utet, Torino, 1997
- 📖 M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, vol. 2, Sansoni, Firenze, 1973
- 📖 E. J. Borowski, J. M. Borwein, *Dizionario Collins della Matematica*, Gremese, Roma, 1995
- 📖 M. Hack, *L'universo nel terzo millennio*, Bur, Milano, 2007

Fonti Internet: "La spirale logaritmica" (maggio 2008)

- 🌐 <http://www.math.it/cabri/sezaurea.htm>
- 🌐 http://it.wikipedia.org/wiki/Spirale_logaritmica

- 🌐 <http://www.sectioaurea.com/>
- 🌐 <http://www.math.it/spirale/spirale-log.htm>
- 🌐 <http://riemann.unica.it/attivita/colloquium/cadeddu/SezioneAurea/aurea.htm>
- 🌐 <http://matematica.uni-bocconi.it/interventi/spirale1.htm>
- 🌐 http://www.cssh.qc.ca/projets/carnetsma/mathematiques_renaissance/nombre_or.html
- 🌐 <http://www.vashti.net/mceinc/golden.htm>
- 🌐 <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi.html>
- 🌐 <http://web.tampabay.rr.com/warhawks/FibonacciWaltz.html>
- 🌐 <http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student/Folders/Frietag.Mark/Homepage/Goldenratio/goldenratio.html>
- 🌐 http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Golden_ratio.html
- 🌐 <http://www.geocities.com/royhowat/debussy.html>
- 🌐 <http://www.goldennumber.net/>
- 🌐 http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- 🌐 <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>
- 🌐 <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/other/phi>
- 🌐 <http://www.bbc.co.uk/dna/h2g2/A2346374>
- 🌐 <http://www.championtrees.org/yarrow/phi/index.htm>
- 🌐 <http://www.golden-section.de.vu/>
- 🌐 <http://www.umcs.maine.edu/~markov/GoldenRatio.pdf>
- 🌐 <http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/spiraurea.htm>
- 🌐 <http://www.magiadeinumeri.it/SPIRALI.htm>
- 🌐 <http://pls.dima.unige.it/Logaritmo/Berto/spirale.htm>
- 🌐 <http://utenti.quipo.it/base5/scienze/fraser.htm>
- 🌐 <http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/LogarithmicSpiral.html>
- 🌐 <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>
- 🌐 <http://www.dm.uniba.it/ipertesto/curve/spirali.doc>
- 🌐 http://lnx.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-La_Divina_Proportione.pdf
- 🌐 http://www.geocities.com/heartland/plains/4142/definitions2.html#algebraic_curve
- 🌐 http://www.mathesisnazionale.it/annate/2004_1/CARANO.pdf
- 🌐 <http://mathinreallife.wordpress.com/2008/03/26/come-mai-le-lampade-fulminanti-per-insetti-funzionano/>

Le illustrazioni (immagini con eventuali modifiche, tutti i diritti sono riservati ai rispettivi creatori, ultima consultazione maggio 2008)

L'immagine della copertina del testo è stata tratta dal sito
"http://valdeperrillos.com/node/908?size=_original"

- 🖼 fig. 1 L'immagine sulla destra è tratta da www.alberosacro.org/images/spirale.jpg
- 🖼 fig. 2 http://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_coordinate_polari

- ❑ fig. 3 http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Basler_Muenster_Bernoulli.jpg Il particolare è tratto da www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/logarithmic.shtml
- ❑ fig. 4 L'immagine è tratta da <http://magiadeinumeri.it/SPIRALI.htm> e da http://fds.mate.polimi.it/file/1/File/Montevarchi/Presentazione_II.pdf
- ❑ fig. 5 L'immagine centrale è tratta da <http://expo.iffrance.com/lenombre/spirales.htm>
- ❑ fig. 6 L'immagine è stata tratta dal "dm.uniba.it/ipertesto/curve/spirali.doc"
- ❑ fig. 7 http://lnx.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-La_Divina_Proportione.pdf
- ❑ fig. 8 "Vortici" è tratto da <http://armoniadellesfere.splinder.com/archive/2007-09>
- ❑ fig. 9 I frattali sono rispettivamente tratti da <http://cootey.com/fractals/index.html> e <http://pro.corbis.com/images/AB-003-0112.jpg?size=572&uid=%7B7A3B0CE3-DE8D-4170-AA35-4CD5D7533D5A%7D>
- ❑ fig. 10 http://fds.mate.polimi.it/file/1/File/Montevarchi/Presentazione_II.pdf
- ❑ fig. 11 La spirale è tratta da <http://utenti.quipo.it/base5/scienze/fraser.htm>
- ❑ fig. 12 L'immagine è tratta da http://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_topi
- ❑ fig. 13 Il collage è composto dall'autore. Le fonti sono (molla metallica) <http://fmboschetto.it/images/esperienze/mollaaspirale.jpg>, (disegno in campo) www.planetcircles.com, (francobollo Liechtenstein) <http://cifr.it/forum96.html>, (francobollo francese) <http://serge.mehl.free.fr/chrono/BernoulliJ.K.html>, (lampada) http://conceptsecontents.blogosfere.it/images/spiral_lamp_1.jpg, (il violino) http://www.moldrek.com/Immagini/parti_del_violino.jpg, http://www.tarchivioliins.it/for_sale/Stradivari_1703/images/riccio_3_quarti.jpg, http://www.scrollavezza-zanre.com/images/home_riccio00.jpg, le restanti sono tratte da http://fds.mate.polimi.it/file/1/File/Montevarchi/Presentazione_II.pdf, l'orologio <http://kk.org/kk/Spiral%20time.jpg>, http://www.sedie.ws/dynamic/common/data/d/files/1000/1310_2_1.jpg
- ❑ fig. 14 Tratta da <http://seriocomic.com/wp-content/uploads/2006/10/spiral.jpg>
- ❑ fig. 15 <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html> e G. Gallino, *Infinita...mente: pillole di matematica condite con magia*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, 2004
- ❑ fig. 16 <http://www.lcavour.it/Studenti/Ricerche%20studenti/RicStud%20-%20Numero%205/n5-1.htm>
- ❑ fig. 17 http://www.naturamediterraneo.it/Public/data4/FOX/DSC_6018.jpg%20bis.jpg_2008420191326_DSC_6018.jpg%20bis.jpg, <http://it.geocities.com/piscopogaspere/VVPale15.jpg>, <http://coco.ccu.uniovi.es/malva/sketchbook/lssketchbook/examples/seashell/images/shells.jpg>, http://i22.photobucket.com/albums/b322/GeeVor/Spiral_Shell_02.jpg, <http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg>, <http://www.tron.vi.it/sezioneaurea>
- ❑ fig. 18 <http://www.volorapaci.com/foto/foto%20big/Elsa,Falco%20jugger.jpg>, <http://www.caccia-ti.ch/images/falcopegellegrinotavola.JPG>
- ❑ fig. 19 Fonti: <http://www.submaldiva.com/elba/Immagini/Cavalluccio.jpg>, <http://img120.imageshack.us/img120/6742/camaleonteqw1.jpg>, <http://www.carsam.com/JPGs/Chameleon.jpg>, www.galleriaroma.it/Siracusa/Monumenti/Castello%20Maniace/Ariete-del-Castello-Maniace.jpg
- ❑ fig. 20 Tratte da <http://goldennumber.net/face.htm>, <http://www.gric.it/Coclea.gif> e N. Campebell, G. Mitchell, B. Reece, *Immagini della biologia C+D*, Zanichelli, Bologna, 2000
- ❑ fig. 21 http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:Low_pressure_system_over_Iceland.jpg, <http://fc.retecivica.milano.it/dallo%20staff/Moderatori/RCMWEB/Tesoro/suk/nubi/centrale.htm>, <http://www.sectioaurea.com/sectioaurea/GALLERIA%20FOTOGRAFICA.htm>, http://www.mathesisnazionale.it/annate/2004_1/CARANO.pdf, <http://www.thunderbolts.info:80/tpod/2005/arch05/050323waterspouts.htm>
- ❑ fig. 22 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2f/M32_hst_big.jpg/280px-M32_hst_big.jpg, http://www.psn.gov.my/program/marsweek/images/gallery/amatuer/robert_gendler/m51_w_hirpool_galaxy.jpg, http://digidownload.libero.it/tr7/heic0706a_H.jpg
- ❑ fig. 23 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e4/Milky_Way_infrared.jpg, http://www.newyorker.com/images/2007/08/20/p465/070820_r16505_p465.jpg
- ❑ fig. 24 http://ipac.jpl.nasa.gov/media_images/sig05-010a.jpg, La Scienza 1: L'universo, a cura di Redazione Grandi Opere di UTET cultura, Gruppo editoriale L'Espresso, Roma, 2005
- ❑ fig. 25 Tratta da M. Hack, *L'universo nel terzo millennio*, Bur, Milano, 2007, pag. 182
- ❑ fig. 26 H. L. Shipman, *Introduzione all'astronomia*, Zanichelli, Bologna, 1988, pag. 160
- ❑ fig. 27 (a cura di) Stefania Stefani, *La vita straordinaria di Leonardo Da Vinci*, Dami, Milano, 1999; http://it.wikipedia.org/wiki/Giapponeseria:_Oiran, http://www.dmarcucci.it/picture/arts/Vincent_Van_Gogh/Vincent_Van_Gogh-Notte_stellata.png, <http://www.artrepro.it/productpics/600-klint-16.jpg>
- ❑ fig. 28 <http://www.art-bonobo.com/peticov/aurea.htm>, <http://www.art-bonobo.com/peticov/antoniopeticov.html>
- ❑ fig. 29 http://farm2.static.flickr.com/1068/1396526555_e141854d9e.jpg?v=0, http://farm2.static.flickr.com/1068/1396526555_e141854d9e.jpg?v=0
- ❑ fig. 30 <http://jancology.com/blog/archives/images/spiral-down.jpg>, http://fds.mate.polimi.it/file/1/File/Montevarchi/Presentazione_II.pdf, <http://www.gabrielross.com/ron-rezek-spiral-suspension-lamp-p-1313.html>, http://projectblancoyd.typepad.com/project_blancoyd/images/2007/11/20/product364.jpeg
- ❑ fig. 31 <http://goldennumber.net/images/Quincy%20Park.jpg>, <http://www.goldennumber.net/images/QP-fence%20spirals.jpg>, <http://www.goldennumber.net/images/QP-snailshell.jpg>, <http://www.goldennumber.net/images/QP-monument.jpg>
- ❑ fig. 32 <http://ceng.calpoly.edu/media/images/plaza/PlazaFinal.jpg>, http://www.facilities.calpoly.edu/campusprojects/EngIV_Web_Cam.htm

Per le figure o le fonti non citate tutti i diritti sono comunque riservati. L'autore si scusa ed è disponibile per eventuali dimenticanze e/o errori.

ludf@live.it

Appendici



UN ESTRATTO DAL “De infinitis spiralibus” DI TORRICELLI

Nel “De infinitis spiralibus” Evangelista Torricelli dà una definizione della spirale logaritmica, chiamandola spirale geometrica. Ecco una parte del testo, tratta dall’approfondimento di C. Carano “Una spirale logaritmica aurea”^{*}.

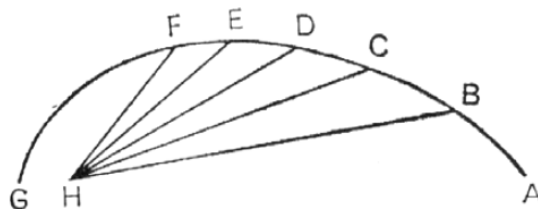
Consideriamo una certa linea [v. figura] ABCDEFG, tale che, se con vertice in H si prendono quanti si vogliono angoli consecutivi tra loro uguali, per esempio:

$$\hat{B}HC = \hat{C}HD = \hat{D}HE = \dots$$

tali angoli siano limitati da segmenti in proporzione continua, si abbia cioè:

$$HB:HC = HC:HD = HD:HE = \dots$$

Tale linea sarà da noi chiamata “spirale geometrica” della quale diremo H il centro e i segmenti HB, HC, HD, HE, ... i raggi.



Chiamiamo geometrica la spirale ora definita per esprimere con il nome stesso quale sia la differenza tra le spirali d’Archimede, che veramente possono dirsi aritmetiche, e le nostre.

Le spirali archimedee infatti hanno questo di particolare, che il punto mobile sopra una retta, animata da moto rotatorio (uniforme) su di un piano, in tempi uguali percorre spazi uguali. Invece nelle nostre spirali il punto che si muove sopra la retta animata da moto rotatorio uniforme, possiede la proprietà caratteristica di percorrere in tempi uguali spazi in progressione geometrica. La proposizione enunciata si dimostra con facile ragionamento in base alla definizione posta: infatti (v. figura) dato che velocità della retta ruotante nel piano è sempre uguale a se stessa, e gli angoli $\hat{B}HC, \hat{C}HD, \hat{D}HE$ sono uguali tra loro, è manifesto che la nostra linea rotante, per esempio HB, descrive in tempi uguali uno qualsiasi dei predetti angoli uguali. Ma poiché i segmenti stessi che limitano quegli angoli uguali sono in proporzione continua, anche le loro differenze saranno in proporzione continua: ma le differenze non sono altro che gli spazi percorsi dal punto mobile che si muove sopra la retta ruotante nel piano. E dunque chiaro che il punto mobile il quale presso Archimede percorre spazi uguali in tempi uguali, nelle nostre spirali non percorre spazi uguali ma spazi in progressione geometrica; quindi piacque chiamare geometriche queste spirali.

“[La spirale meravigliosa] Si può usarla come simbolo sia della forza e costanza nelle avversità, sia del corpo umano che, dopo la morte, è restituito al suo preciso e perfetto Sé”
Jakob Bernoulli

^{*} C. Carano, Una spirale logaritmica aurea, 2004, http://www.mathesisnazionale.it/annate/2004_1/CARANO.pdf, ultima consultazione Maggio 2008.



SULL'EQUAZIONE DELLA SPIRALE LOGARITMICA (*)

L'equazione parametrica della spirale logaritmica, in funzione di un parametro variabile t , è

$$\begin{cases} X(t) = ab^t \cos(t) \\ Y(t) = ab^t \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \text{ appartenente a } \mathbb{R}.$$

L'equazione (1) può essere scritta come

$$f(\theta) = r = aq^{\frac{\theta}{2\pi}},$$

dove q è detto indice di accrescimento, rappresentando il fattore con cui il raggio cresce ad ogni evoluzione della curva.

Ponendo $b = \frac{\log_e q}{2\pi}$ (per la spirale aurea è: $b = \frac{\log_e \varphi}{\pi/2}$) l'equazione della curva diventa

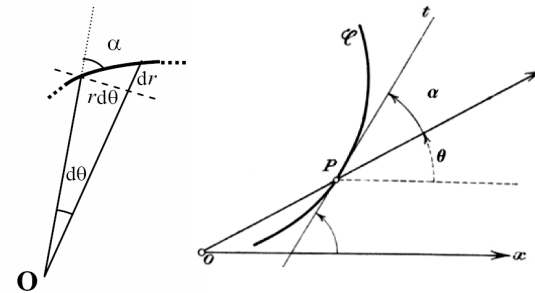
$$r = ae^{b\theta} \quad (3)$$

Questa formulazione definisce il nuovo parametro b , che ha un preciso significato; facendo riferimento alle figure a lato:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{dr}{rd\theta} = \frac{bae^{b\theta} d\theta}{ae^{b\theta} d\theta} = b$$

cioè il raggio vettore, negli infiniti punti in cui incontra la spirale, forma con le tangenti in tali punti angoli congruenti, definibili dalla formula $\alpha = \operatorname{arcctg}(b)$.

* Informazioni tratte e liberamente modificate da: E. Di Rienzo, *La divina proporzione*, 2001, http://lnx.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-La_Divina_Proportione.pdf, ultima consultazione Maggio 2008; C. Brogi, *Equazioni di 3° e 4° Grado, Le linee curve piane, Gli algoritmi per calcolarle*, <http://spazioinwind.libero.it/corradobrogi/V/V-314.htm>, ultima consultazione Maggio 2008, http://www.mathesisnazionale.it/annate/2004_1/CARANO.pdf, ultima consultazione Maggio 2008.



Anche la (3) permette di spiegare l'attributo logaritmico, dal momento che la curva può essere riscritta come $\log_e r = b\theta + \operatorname{cost}$.

Data l'equazione (1) in forma $r = b^{k\theta}$, si può dimostrare che la lunghezza dell'arco AB è proporzionale alla differenza dei raggi vettori degli estremi.

$$AB = (r_2 - r_1) \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$$

L'area della spirale logaritmica, compresa fra la curva ed i raggi r_1 e r_2 è:

$$A = \frac{1}{4k} (r_2^2 - r_1^2), \quad \text{in particolare} \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} (A) = \frac{r^2}{4k}$$

La spirale logaritmica incontra il raggio vettore r sotto un angolo costante $\omega = \operatorname{arcctg}(k)$. La lunghezza L dell'arco dal polo a r , con $k = \operatorname{ctg} \omega$ è $L = r / \cos \omega$. Considerando invece la (3) la precedente relazione diviene $L = r \cos \theta$.



LA SEZIONE AUREA PER LA SPIRALE

La letteratura matematica sulle proprietà del numero φ è vastissima, ci limitiamo ad indicarne alcune proprietà ai fini di studiare la spirale armonica.

La sezione aurea è la divisione di un segmento in modo che l'elemento più corto sta al più lungo come il più lungo sta all'intero segmento; tale ragionamento produce il numero irrazionale detto rapporto aureo, $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034...$ il cui inverso è 1.618034, indicato con ϕ . Il rapporto aureo è il limite della frazione continua

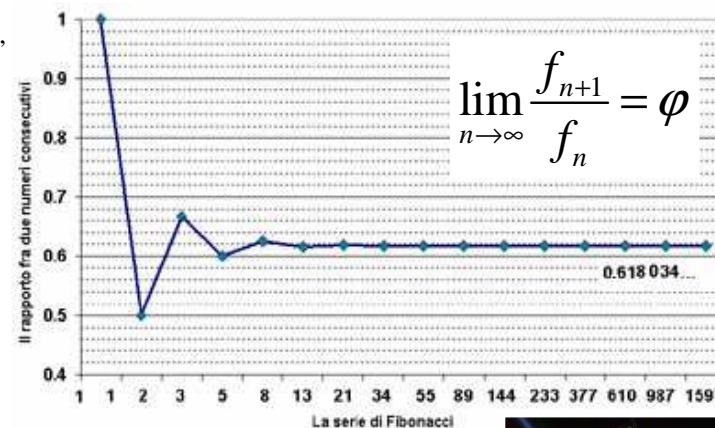
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

e della radice nidificata

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

le quali possono rappresentare la forma algebrica della proprietà di autosomiglianza.

Il numero aureo infine è il limite del rapporto di termini successivi della serie di Fibonacci (in cui ogni elemento è la somma dei due precedenti; i primi numeri sono : 1, (0+1) 1, (1+1) 2, (2+1) 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...). Infatti, chiamati f_n un qualsiasi numero di Fibonacci e f_{n+1} il successivo è possibile scrivere il rapporto $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ che tende a φ al tendere di n all'infinito (fig. 1).



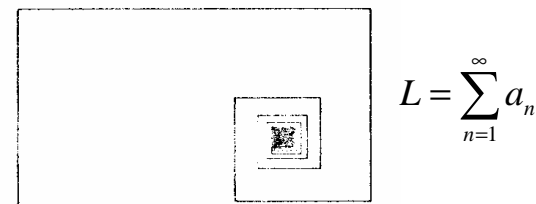
Un'opera di Metz: i numeri di Fibonacci sulla Mole Antonelliana a Torino.



LA COSTRUZIONE DELLA SPIRALE LOGARITMICA (*)

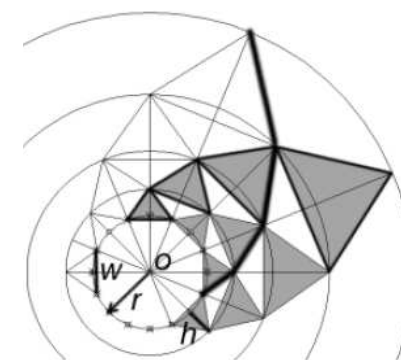
Riporto in conclusione alcuni esempi per la costruzione *approssimata* della spirale logaritmica, essendo questa curva il risultato di un movimento di rotazione e allo stesso tempo di traslazione.

Un primo semplice modo è considerare una spirale poligonale inversa, composta da infiniti tratti rettilinei in successione decrescente e tendente a zero. Ad esempio per $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ponendo che a_n sia $1/n$ per ogni n di S , allora si avrà una curva simile a quella a lato (particolare la successione $S = \sqrt{n}$, dove n definisce la lunghezza del raggio della spirale tra punti equidistanti).

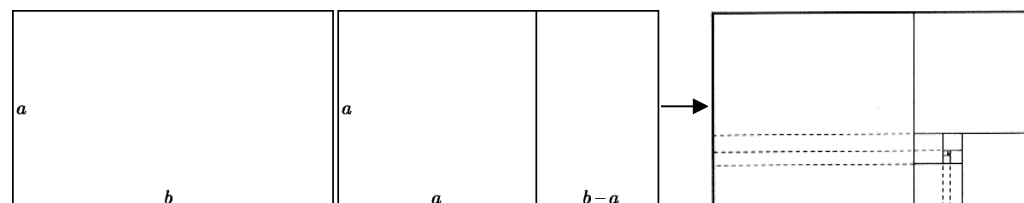


Un secondo esempio di costruzione di una spirale poligonale che approssima quella logaritmica è quello iterativo suggerito da Manuel Bastioni:

“Per prima cosa si sceglie il raggio r del cerchio più piccolo (...). Si suddivide poi questo cerchio in un certo numero n di parti uguali, di larghezza pari a w . Si sceglie poi a piacere l’altezza h con cui realizzare la prima fila di triangoli. Unendo a due a due i vertici superiori di questi ultimi si otterrà una serie di segmenti. Questi saranno la base per una nuova fila di triangoli. Utilizzando lo stesso rapporto $w = h$ si determina la nuova altezza. Utilizzando i vertici di questa seconda fila di triangoli si crea la base per una terza serie ancora più esterna.”



Un ulteriore metodo per disegnare una spirale logaritmica, in questo caso armonica, è utilizzare due figure particolari legate alla sezione aurea. Dato un rettangolo aureo (un rettangolo il cui rapporto tra lunghezza e larghezza è il rapporto aureo) sottraendo da esso un



* Informazioni tratte e liberamente modificate da: M. Bastoni, *La favola della sezione aurea*, 2001, http://www.unich.it/progettistisidiventa/archivio_lavori_studenti/Bastioni_Aurea.pdf, consultazione Maggio 2008; <http://www.dm.uniba.it/ipertesto/curve/spirali.doc>, ultima consultazione Maggio 2008; <http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/spiraurea.htm>, consultazione Maggio 2008.

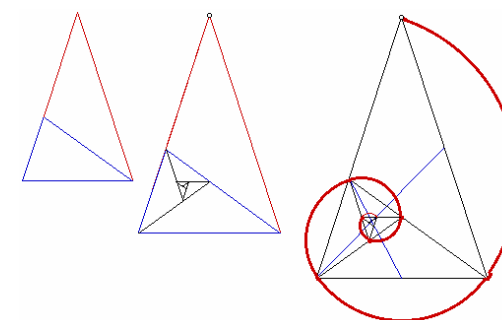
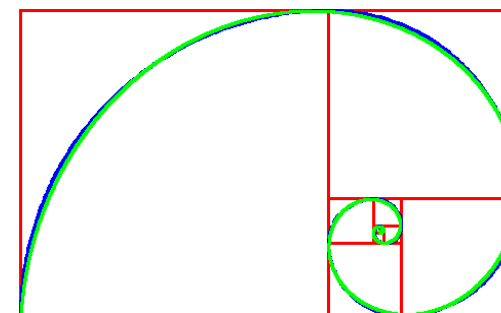
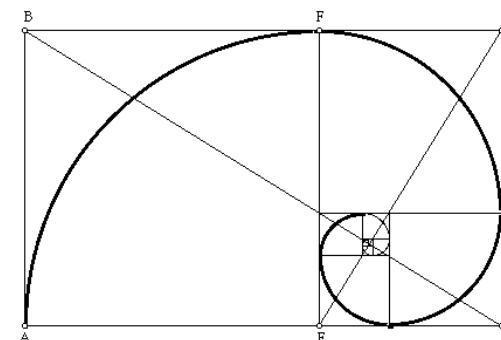
quadrato di lato uguale al minore si ottiene nuovamente un rettangolo aureo. Odifreddi spiega: “detto alla greca, il quadrato è lo gnomone del rettangolo aureo, nel senso che sottratto o aggiunto a uno ne produce un altro.” ** Iterando questo algoritmo si ottiene un vortice di quadrati e una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli, ridotti di un fattore pari a φ . Lo stesso avviene se si aggiunge al rettangolo di partenza un quadrato pari al lato maggiore, ottenendo rettangoli sempre più grandi.

Costruendo a questo punto un arco di circonferenza iscritto in ogni quadrato si ottiene una spirale logaritmica armonica – di circa 17° – *approssimata* (in verde la spirale logaritmica costruita al computer). Tracciando la diagonale in comune ai rettangoli orizzontali e poi quelli verticali si ottiene il polo della spirale (chiamato dal matematico C. A. Pickover “occhio di Dio”).

Posto che $BC = \varphi$ e $AB = 1$ allora i raggi dei raccordi che formano la spirale hanno lunghezza φ^i per $-\infty < i < +\infty$. Per $i < 1$ la spirale è contenuta nel rettangolo ABCD. Le coordinate del polo sono

$$O_x = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad O_y = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Lo stesso procedimento è possibile farlo per il triangolo aureo: un triangolo isoscele il cui rapporto tra lato e base è pari a φ , di valori angolari 36° , 72° e 72° : “se si sottrae da un triangolo aureo uno gnomone aureo, cioè un triangolo isoscele coi lati uguali alla sezione aurea del lato maggiore del triangolo di partenza, si ottiene un triangolo aureo”. ** E’ possibile scomporre il triangolo di partenza in altro più piccoli con le stesse proprietà del primo. Analogamente è possibile prolungare la base e congiungere l’estremo con il vecchio vertice, costruendo triangoli sempre più grandi. Infine disegnando archi di



** P. Odifreddi, Variazioni: un tema aureo, *Le Scienze*, n. 436, dicembre 2004, pag. 78.

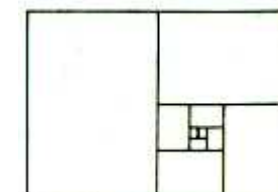
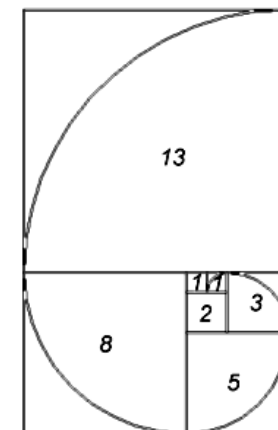
circonferenza si disegna una spirale logaritmica aurea.

Analogo alla costruzione del rettangolo aureo è la costruzione di una spirale logaritmica detta *di Fibonacci*, poiché si basa sui numeri di Fibonacci (cfr. La sezione aurea per la spirale) Partendo da un quadrato di dimensioni qualsiasi, di lato n , è possibile costruire un ulteriore quadrato ottenendo un rettangolo di lati $2n \times n$. Sul lato più lungo di questo rettangolo costruiamo un altro quadrato, con lato pari a $2n$. Si otterrà un rettangolo di lati $3n \times 2n$. Iterando questo processo, si conclude che i quadrati utilizzati nella successione hanno lunghezza pari a $1n, 1n, 3n, 5n, 8n, 13n, \dots$ ottenendo la serie di Fibonacci.

Costruendo degli archi di circonferenza da ogni vertice

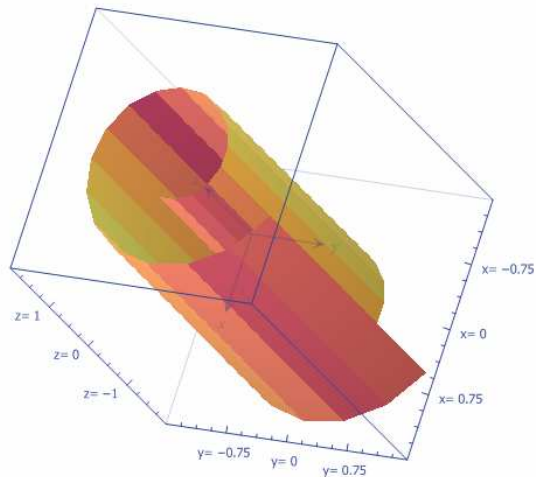
dei quadrati si ottiene una spirale logaritmica armonica approssimata.

A tale proposito G. Markowski, in “Misconceptions about the Golden Ratio” (in “The College Mathematics Journal”, Vol. 23, Jan. 1992, pp. 2-19) suggerisce che le spirali logaritmiche (ma in questo caso non armoniche) possono essere anche create da rapporti di partenza diversi da $1:1$, ad esempio $\sqrt{2}:1$ (esempio a lato).





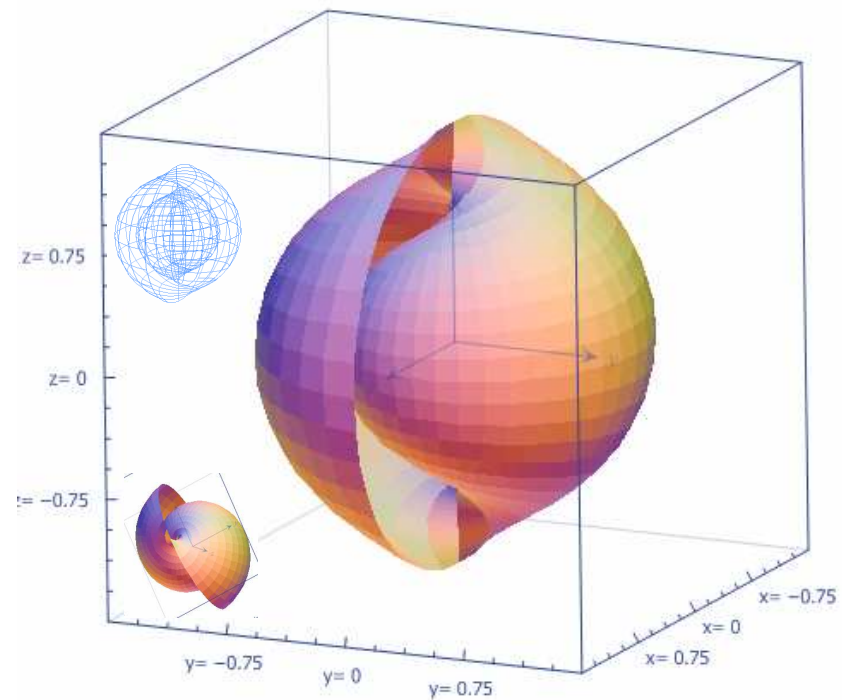
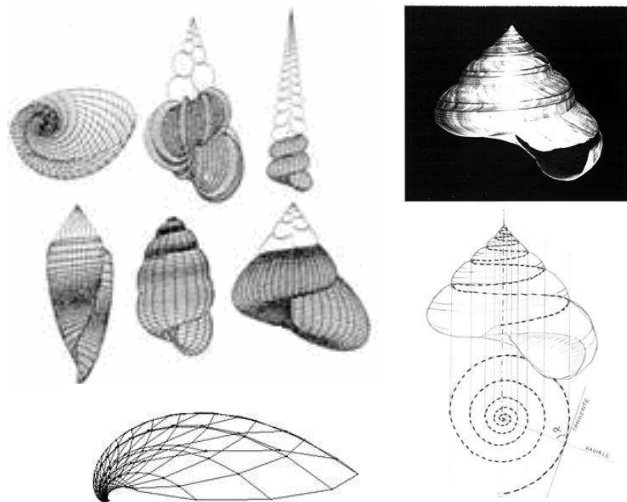
STUDIO DELLA SPIRALE LOGARITMICA TRIDIMENSIONALE



Considerando le coordinate 3D cilindriche dell'equazione $r = ab^\theta$, dati $a = 0.48$ e $b = 1.16$ ottengo il grafico tridimensionale a sinistra.

Per $b = 1$ ottengo dunque un cilindro a cui sono state tagliate le basi.

Considerando le coordinate 3D sferiche, dati $a = 0.48$ e $b = 1.16$ ottengo invece una forma estremamente interessante, simile ad una conchiglia. Per $b = 1$ ottengo una sfera. La figura a sinistra in basso è una rotazione della stessa figura.

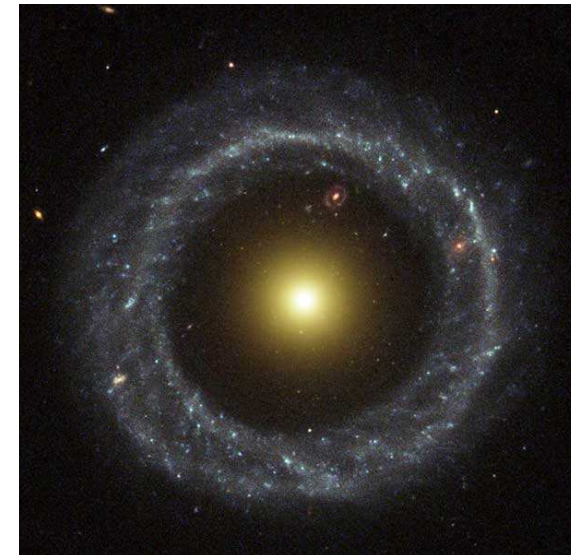




LA MODERNA CLASSIFICAZIONE DELLE GALASSIE

La difficile moderna classificazione delle galassie comprende:

- 🌀 **proto-galassie**: galassie in formazione;
- 🌀 galassie **normali**: classificate da Hubble, ma la teoria evolutiva -*da ellittiche a spirale*- del diagramma a diapason è stata accantonata;
- 🌀 **radiogalassie**: emettono onde radio migliaia o milioni di volte di più rispetto alle galassie normali;
- 🌀 **galassie con nuclei attivi** - detti AGN, Active Galactic Nuclei, si distinguono in: galassie **Seyfert** (hanno un nucleo piccolo e luminoso rispetto all'estensione dei bracci a spirale), galassie **N** (nucleo brillante e dimensioni ridotte), galassie **Markarian** (produzione raggiante superiore alla media, distinte in S -aspetto stellare- e D -diffuse-), **BL Lac** (oggetto BL Lacerante, particolare quasar scoperto per la prima volta nella costellazione della Lucertola), **QSO** (Quasi Stellar Object: *quasar*, QUASi Stellar Radiosource ovvero sorgente radio quasi stellare, e *QSO non radioemittenti*), infine **blazar** (BLLacQuaSar ovvero QSO e BL Lac rapidamente e violentemente variabili);
- 🌀 galassie **peculiari**: non classificabili a causa della specificità dei fenomeni che vi avvengono, comprendono le galassie interagenti – dovute alla collisione fra oggetti vicini – le galassie a conchiglia e le galassie ad anello;
- 🌀 **Liner**: Low Ionisation Nuclear Emission Region, galassie le cui emissioni gassose provengono da gas a bassa ionizzazione;
- 🌀 **Starburst Galaxies**: presentano tante stelle azzurre, giovani; sono galassie in cui vi è un'esplosione di natalità stellare;
- 🌀 **l'oggetto di Hoag**: dal nome del suo scopritore, in foto* a destra, è un caso unico nell'universo esplorato.

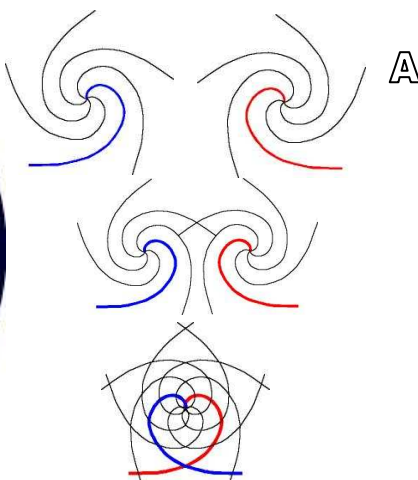
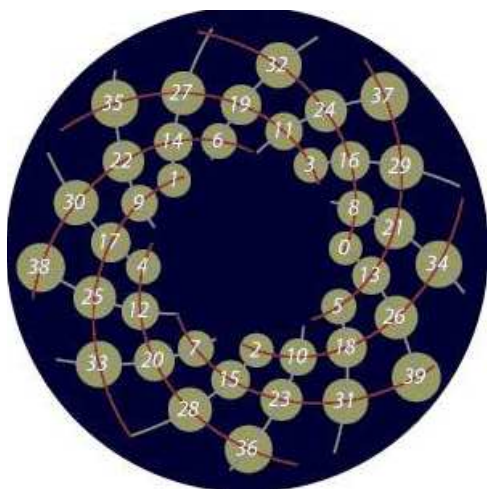


* Tratta da: http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/2002/21/images/a/formats/full_jpg.jpg, Maggio 2008.

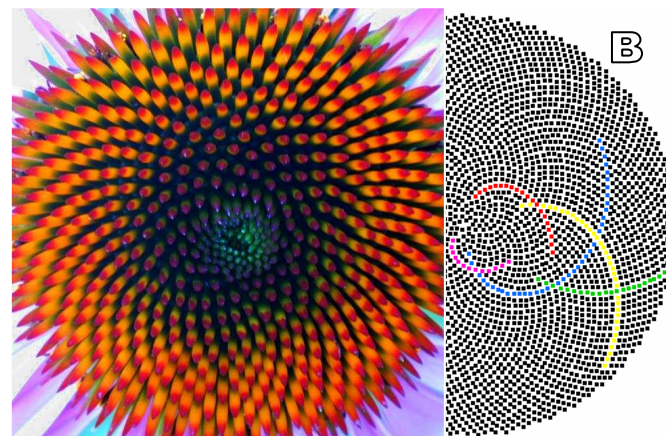


APPARATO ICONOGRAFICO

Seguono una serie di immagini che per motivazioni di spazio non sono state inserite in precedenza. I riferimenti al capitolo 2 sono inserire le immagini A, B, C, D, E. In riferimento al capitolo 3 si vedano le F, G, H, I, L.



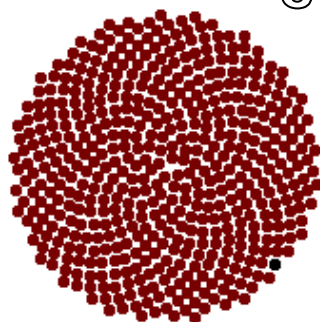
A



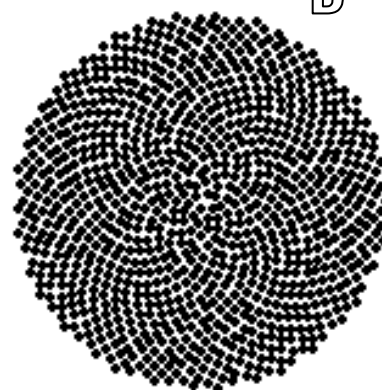
B

500, 1000 e
5000 semi disposti
secondo spirali di
crescita

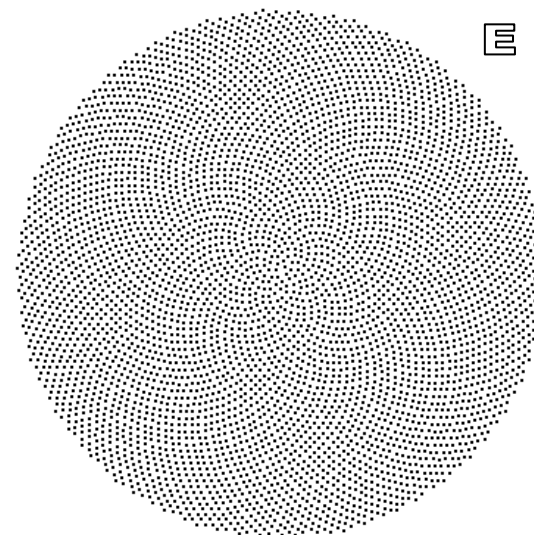
(Immagine tratte da:
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>,
http://www.mathesisnazionale.it/annate/2004_2/CARANO.pdf,
<http://www.championtrees.org/yarrow/phi/phi5.htm>;
consultazione maggio 2008)



C



D



E



Van Gogh e Klimt: opere da cui sono tratti i particolari.

[Tratte da: http://it.encarta.msn.com/media_461542745_761577820_1_1/Van_Gogh_Notte_stellata.html,
http://www.dmarcucci.it/picture/arts/Vincent_Van_Gogh/Vincent_Van_Gogh,
<http://www.artrepro.it/productpics/600-klimt-16.jpg>,
<http://imagecache2.allposters.com/images/pic/EUR/1505-15896~L-abbraccio-L-avveramento-Posters.jpg>; consultazione maggio 2008.]

A destra una spirale logaritmica tridimensionale dell'artista Salvador Dali' e le spirali di "Automobile in corsa" di G. Balla.

Tratte da <http://people.tribe.net/05cb5618-d213-41bd-9402-cdd4db07b59d/blog/3f7419df-32b8-4f51-972d-13d9e1f2c065>,
http://www.mart.trento.it/UploadImgs/895_02_Giacomo_Balla___Velocit___d___a_utomobile___Velocit___n___1.jpg, maggio 2008



*“Vedere un mondo in un grano di sabbia
e un universo in un fiore di campo,
possedere l’infinito sul palmo della mano
e l’eternità in un’ora.”*

William Blake (1757-1827)



This document was created with Microsoft Word (Times New Roman and Constantia), MathType Lite and PDF Creator. Print in Venaria Reale (To), June 2008.

«There was a long pause.

“Is that all?” Alice timidly asked.

“That’s all,” said Humpty Dumpty. “Good-bye.»

C. L. Dodgson



DE FUSCO LUCIO, “LA SPIRALE MERAVIGLIOSA”

